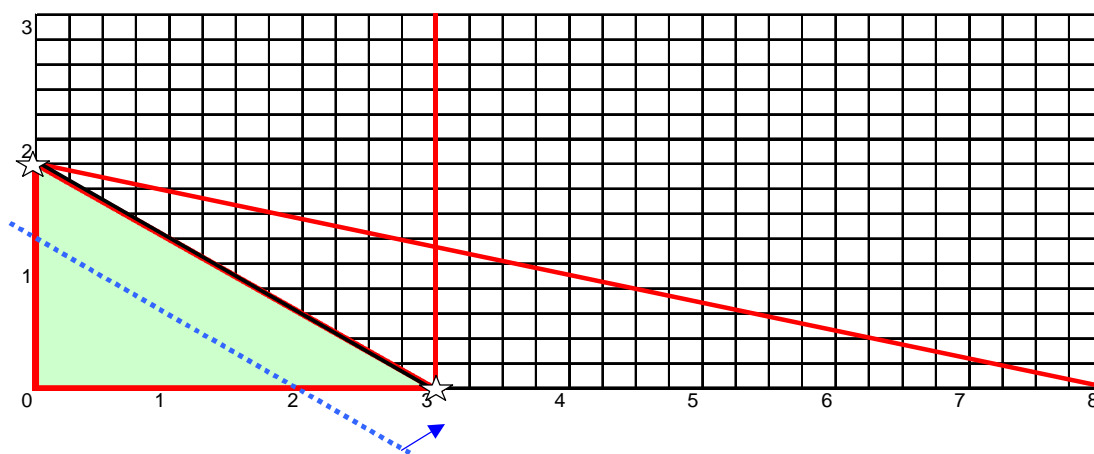


EJERCICIO 1

Considere el Programa Lineal siguiente:

Max	$Z = 6x_1 + 9x_2$
s.r.	
	(1) $4x_1 + 6x_2 \leq 12$
	(2) $2x_1 + 8x_2 \leq 16$
	(3) $2x_1 \leq 6$
	$x_1, x_2 \geq 0$

(1.a)



El Problema tiene una Región Factible delimitada por el triángulo $[(0,0); (0,2); (3,0)]$. La Función Objetivo $Z = 6x_1 + 9x_2$ (línea punteada azul) es paralela a la restricción (1) $4x_1 + 6x_2 \leq 12$.

El PL presenta 2 Soluciones FEV Alternativas : (0,2) y (3,0), por lo tanto se trata de un PL con Soluciones Múltiples cuyo conjunto de soluciones queda definido por :

$$x^* = w_1 * \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + w_2 * \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $w_1 + w_2 = 1$, y $0 \leq w_i \leq 1$ para $i = 1, 2$.

La función objetivo en el óptimo es igual a $Z^* = 18$

(1.a.1) Si se modifica la restricción (1) en (1') $4x_1 + 6x_2 \geq 12$, entonces la Región Factible se modifica en una nueva Región, delimitada ahora por los FEVs (0,2); (3,0) y (3, 5/4). Ahora, la nueva Solución Óptima (Única) corresponde a la FEV ($x_1=3$; $x_2=1,25$).

(1.a.2) Al modificar el signo de los coeficientes de la Función Objetivo, se modifica la dirección en la cual se incrementa la FO. En lugar de incrementarse en la dirección NE como era el caso en (a), ahora la FO se incrementa en la dirección SW. Esto cambia la Solución Óptima, en este caso la nueva Solución Óptima (Única) corresponde a la FEV ($x_1=0$; $x_2=0$).

(1.b.1) Completar la Tabla e Identificar en cada Iteración si se trata de una Solución Básica Factible.

ITERACION	Var. Basicas	Nº Ecuacion	Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	LD	
Nº 0	Z	(0)	1	-6	-9	0	0	0	0	Sol. Factible Sol. No-Optima
	x ₃	(1)	0	4	6	1	0	0	12	
	x ₄	(2)	0	2	8	0	1	0	16	
	x ₅	(3)	0	2	0	0	0	1	6	
Nº 1	Z	(0)	1	0	0	3/2	0	0	18	Sol. Factible Sol. Optima Sol. Múltiples
	x ₂	(1)	0	2/3	1	1/6	0	0	2	
	x ₄	(2)	0	-10/3	0	-8/6	1	0	0	
	x ₅	(3)	0	2	0	0	0	1	6	
Nº 2	Z	(0)	1	0	0	3/2	0	0	18	Sol. Factible Sol. Optima Sol. Múltiples
	x ₁	(1)	0	1	3/2	1/4	0	0	3	
	x ₄	(2)	0	0	5	-1/2	1	0	10	
	x ₅	(3)	0	0	-3	-1/2	0	1	0	
Nº 3	Z	(0)	1	0	0	3/2	0	0	18	Sol. Factible Sol. Optima Sol. Múltiples
	x ₁	(1)	0	1	0	2/5	-3/10	0	0	
	x ₂	(2)	0	0	1	-1/10	2/10	0	2	
	x ₅	(3)	0	0	0	-4/5	6/10	1	6	
Nº 4	Z	(0)	1	0	0	3/2	0	0	18	Sol. Factible Sol. Optima Sol. Múltiples
	x ₁	(1)	0	1	0	0	0	1/2	3	
	x ₂	(2)	0	0	1	1/6	0	-1/3	0	
	x ₄	(3)	0	0	0	-4/3	1	10/6	10	

(1.b.2) Identificar las Soluciones Básicas Complementarias del Primal y del Dual asociado, indicando si las mismas son Factibles y/o Optimas.

Iteración Nº	Primal			Z ₀ =Y ₀	Dual		
	Sol. Básica	Factible ?	Óptimo ?		Sol. Básica	Factible ?	Óptimo ?
0	(0, 0, 12, 16, 6)	Si	No	0	(0, 0, 0, -6, -9)	No	No
1	(0, 2, 0, 0, 6)	Si	Si	18	(3/2, 0, 0, 0, 0)	Si	Si
2	(3, 0, 0, 10, 0)	Si	Si	18	(3/2, 0, 0, 0, 0)	Si	Si
3	(0, 2, 0, 0, 6)	Si	Si	18	(3/2, 0, 0, 0, 0)	Si	Si
4	(3, 0, 0, 10, 0)	Si	Si	18	(3/2, 0, 0, 0, 0)	Si	Si

Infomación para el Caluculo de la Tabla en 1.b.1

- **Para todas las Iteraciones**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad c = [6 \quad 9]; \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- **1ra Iteración**

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ -10/3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} ; \quad b^* = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} ;$$

$$c_B = [9 \ 0 \ 0] ; \quad c_B B^{-1} = [1,5 \ 0 \ 0] ; \quad c_B B^{-1}A - c = [0 \ 0]$$

$$Z^* = c_B B^{-1}b = [18]$$

- **2nda Iteración**

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} ; \quad b^* = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$c_B = [6 \ 0 \ 0] ; \quad c_B B^{-1} = [1,5 \ 0 \ 0] ; \quad c_B B^{-1}A - c = [0 \ 0]$$

$$Z^* = c_B B^{-1}b = [18]$$

- **3ra Iteración**

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -3/10 & 0 \\ -1/10 & 1/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad b^* = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} ;$$

$$c_B = [6 \ 9 \ 0] ; \quad c_B B^{-1} = [1,5 \ 0 \ 0] ; \quad c_B B^{-1}A - c = [0 \ 0]$$

$$Z^* = c_B B^{-1}b = [18]$$

- **4ta Iteración**

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/3 \\ -4/3 & 1 & 5/3 \end{bmatrix} ; \quad B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad b^* = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} ;$$

$$c_B = [6 \ 9 \ 0] ; \quad c_B B^{-1} = [1,5 \ 0 \ 0] ; \quad c_B B^{-1}A - c = [0 \ 0]$$

$$Z^* = c_B B^{-1}b = [18]$$

(1.c.1) Identificar las Variables Básicas y No-Básicas de la FEV y reconstruir el vector b^* .

El PL tiene 2 Variables de Decisión y 3 Variables de Holgura, y cuenta 3 Restricciones funcionales el cual constituye un Sistema de 3 Ecuaciones y 5 incógnitas (variables) . Para poder resolver el Sistema de Ecuaciones y calcular la Solución, es necesario identificar 2 variables no-básicas las cuales serán anuladas.

En el contexto de este Problema y de acuerdo a la Salida del Solver disponible y a la Solución Óptima del PL, se pueden identificar hasta 2 Soluciones Básicas que pueden ser compatibles con dicha información :

	<i>Variables Básicas</i>	<i>Variables No-Básicas</i>	<i>Vector b^*</i>
Sol (1)	(x_1, x_2, x_5)	(x_3, x_4)	$(0, 2, 6)'$
Sol (2)	(x_2, x_4, x_5)	(x_1, x_3)	$(2, 0, 6)'$

(1.c.2) Reconstruir la Línea (0) de la Tabla Final Final del Simplex.

Nº Línea	Z	Costos Reducidos		Precios Sombra : y^*			Z*
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(0)	1	0	0	3/2	0	0	18

(1.c.3) Rango de Optimalidad : c_j para $j=1, 2$

$$c_1 \in [6 - 3.75 ; 6 + 0] = [2.25 ; 6]$$

$$c_2 \in [9 - 0 ; 9 + 15] = [9 ; 24]$$

(1.c.4) Rango de Factibilidad : b_i para $i = 1, 2, 3$

$$b_1 \in [12 - 0 ; 12 + 7.5] = [12 ; 19.5]$$

$$b_2 \in [16 - 10 ; 16 + 0] = [6 ; 16]$$

$$b_3 \in [6 - 6 ; 6 + \infty] = [0 ; +\infty)$$

EJERCICIO 2

(A) Problema Primal

Variables de Decisión x_i = cantidad producida del producto i , $i = \{1, 2, 3\}$

$\text{Max } Z = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3$
s.r.
$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 500$
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600$
$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 900$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(B) Problema Dual

Variables de Decisión y_i = valor de una unidad del insumo i

donde y_1 : representa el valor de la hora de producción semanal,
 y_2 : representa el valor de 1 kg de Aluminio,
 y_3 : representa el valor de 1 de kg de Acero

$$\text{Min. } y_0 = 500 y_1 + 600 y_2 + 900 y_3$$

$$\text{s.r.}$$

$$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 40$$

$$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 60$$

$$2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 80$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Donde el valor de $y = \{y_1, y_2, y_3\}$ representa el valor de los coeficientes de la Línea (o) asociados a las variables de Holgura ($y = c_B B^{-1}$), o los precios sombra del problema primal en la solución óptima.

(C)

c.1)

$$z^* = 22.000$$

$$x^*_1 = 0 \quad x^*_4 = 0$$

$$x^*_2 = 100 \quad x^*_5 = 0$$

$$x^*_3 = 200 \quad x^*_6 = 100$$

Las **Ecuaciones de Definición** están relacionadas con las ecuaciones de frontera de las restricciones que definen la solución FEV (ver H&L: Fundamentos del Método Simplex, pag. 155) :

$$(1) \quad x_1 = 0$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 500$$

$$(3) \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 600$$

c.2)

$$y^* = 22000$$

$$y^*_1 = 20 \quad y^*_4 = 20$$

$$y^*_2 = 20 \quad y^*_5 = 0$$

$$y^*_3 = 0 \quad y^*_6 = 0$$

c.3) Rango de Optimalidad

$$c_2 \in [60 - 20 ; 60 + 20] = [40 ; 80]$$

Si $c_2 = 70$ entonces : $Z^* = 70(100) + 200(80) = 23.000$

c.4) Hora extra = \$ 24

Como el precio sombra de las horas de producción es de \$ 20, esta cifra es lo máximo que estoy dispuesto a pagar por una unidad (hora) adicional del recurso mano de obra. Debido a ello no es conveniente para la empresa programar horas extra.

c.5) Rango de Factibilidad

- Para el Aluminio:
 $b_2 \in [600 - 100; 600 + 200] = [500; 800]$
- Para el Acero:
 $b_3 \in [900 - 100; +\infty] = [800; +\infty]$

El coeficiente b_i puede variar dentro del Intervalo Permitido para permanecer Factible (o Rango de Factibilidad), sin que la Solución Básica deje de ser factible, asumiendo que todos los demás parámetros permanecen constantes). (Ver Esencia del Análisis de Sensibilidad en H&L, pag. 217).

c.6) Rango de Factibilidad

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$b^* = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}; \quad Z^* = c_B B^{-1}b = [18]$$

La pregunta supone calcular el rango de factibilidad cuando se produce un **cambio simultáneo en b_2 y b_3** . El Informe de Sensibilidad (SOLVER) solamente nos informa sobre los cambios en un parámetro asumiendo que todos los demás permanecen fijos. (Ver H&L pag. 223 Aplicación del Análisis de Sensibilidad-Caso 1- Cambios en las b_i).

Para resolver esta pregunta se requiere adicionar los dos efectos (las columnas de B^{-1} correspondientes a las variables de Holgura x_5 y x_6):

$$b^* + \Delta \begin{bmatrix} 1+0 \\ -0.5+0 \\ -0.5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100+\Delta \\ 200-0.5\Delta \\ 100+0.5\Delta \end{bmatrix} \geq 0$$

La resolución de este sistema de ecuaciones permite identificar el valor de Δ que satisface con las 3 condiciones anteriores: $\Delta \in [-100; 400]$.

Por lo tanto la respuesta es que la empresa puede comprar hasta 400 paquetes sin cambiar la factibilidad de la solución óptima inicial, y por lo tanto tampoco los precios sombra.

c.7) El Costo Reducido $z_1 - c_1 = 20$ significa que el coeficiente de ganancia unitaria (c_1) de la variable x_1 debería incrementarse en más de 20 unidades para que dicha variable asuma valores positivos en la solución óptima.

$$c_B B^{-1} = [20 \quad 0 \quad 0]; \quad c_B B^{-1}A - c = [20 \quad 0 \quad 0]$$

EJERCICIO 3

Considere un problema de Programación Lineal en su forma estándar. Se pide etiquetar las siguientes afirmaciones como FALSA o VERDADERA, y después justifique su respuesta:

- (3.1) Un modelo de Programación Lineal puede tener como **máximo 2 soluciones FEV óptimas alternativas**.

FALSO.

(Ver Soluciones Adyacentes, H&L pag. 156-158).

Cuando $n=2$ (2 variables de decisión) una Región Factible (RF) acotada representa un polígono (dimensión $n=2$), y la frontera de esta RF está constituida por varios segmentos de recta (dimensión $= 1 = n-1$). La Función Objetivo (FO) es también una línea recta (dimensión $= 1 = n-1$). En el caso de una FO con la misma pendiente que alguna de las restricciones, el método Simplex identificará en el Óptimo 2 FEV adyacentes y el conjunto de soluciones como combinación lineal de las mismas.

Cuando $n=3$ (3 variables de decisión) una Región Factible (RF) acotada representa un poliedro (dimensión $n=3$), y la frontera de esta RF está constituida por varios planos (dimensión $= 2 = n-1$). La Función Objetivo (FO) es también un plano (dimensión $= 2 = n-1$). En el caso de una FO con la misma pendiente que alguna de las restricciones, el método Simplex identificará en el Óptimo 3 FEV adyacentes y el conjunto de soluciones como combinación lineal de las mismas.

- (3.2) Si una solución factible es **óptima pero no FEV**, entonces existe un número infinito de soluciones óptimas.

VERDADERO.

(Ver Propiedades de las Soluciones FEV, H&L pag. 159)

Si el Problema tiene exactamente una solución óptima, entonces ésta debe ser una solución FEV.

Si el Problema tiene soluciones óptimas múltiples y una región factible acotada, entonces al menos 2 deben ser soluciones FEV adyacentes y es posible obtener todas las soluciones óptimas como promedios ponderados de las soluciones FEV óptimas identificadas.

- (3.3) Un PL Primal y el Dual asociado tienen necesariamente la **misma cantidad de soluciones básicas**.

VERDADERO.

(Ver Propiedad de las Soluciones Básicas Complementarias, H&L pag. 208).

Cada Solución Básica en el problema Primal tiene una Solución Básica complementaria en el problema Dual, en donde los valores respectivos de la función objetivo (Z ; y_0) son iguales.

Sin embargo, salvo en el caso de las soluciones básicas óptimas, siempre que una solución es factible en el Primal, la otra no lo es en el Dual.

- (3.4) Si x es una Solución Factible cualquiera del Problema Primal, e y es una Solución Factible cualquiera del Problema Dual, entonces se verifica que : $cx = yb$.

FALSO.

(Ver Propiedad de Dualidad Débil y de Dualidad Fuerte, H&L pag 201-202).

La Igualdad enunciada por la letra del problema solamente se verifica cuando x^* y y^* representan una solución óptima.

- (3.5) A nivel de la Solución Óptima de un Problema de Programación Lineal, el total de variables de decisión diferentes a 0 es igual al número total de restricciones funcionales del mismo.

FALSO.

Por un lado, el nº de variables de decisión puede perfectamente ser menor al nº de restricciones de un problema, por lo que la proposición ya no podría cumplirse.

Por otro lado, incluso en el caso de que la proposición no especificara que se tratase de variables de decisión sino de variables en general, seguiría siendo falsa, ya que si bien los problemas de programación lineal tienen la misma cantidad de variables básicas que de restricciones funcionales, podría darse el caso de una variable básica que no tenga un valor positivo sino cero (sería el caso de una solución degenerada, en donde la variable básica con valor cero es la asociada a la restricción activa superflua).

- (3.6) Un Costo Reducido igual a 0 para una variable de decisión No-básica (asociado a una Solución Óptima), es un indicador de la presencia de Soluciones óptimas múltiples (alternativas).

VERDADERO.

(Ver Intervalo Permitido para permanecer Óptima, H&L pag. 229)

Para cualquier variable de decisión x_j , la expresión $z_j^* - c_j$ se la interpreta como el Costo Reducido para x_j , donde:

$$z_j^* - c_j = y^* A_j - c_j = c_B B^{-1} A - c$$

A_j : representa la columna j de la matriz A de coeficientes de las restricciones funcionales del PL.

En un PL (en forma estándar) el Costo Reducido representa la cantidad mínima en la que tendría que reducirse el costo unitario de la actividad j para hacer que valga la pena realizar esa actividad j ($x_j \geq 0$). Adicionalmente, $z_j^* - c_j$ representa el incremento máximo permitido para c_j para conservar óptima la Solución Básica actual.

Por lo tanto, si $z_j^* - c_j = 0$ para una variable de decisión No-Básica, el Coeficiente Reducido está indicando que es una variable candidata a entrar a la Base, configurando una nueva FEV óptima alternativa, ya que no modifica la optimalidad de la Solución Básica inicial.