



**EJEMPLOS DE MODELADO Y  
 FORMULACION DE PROGRAMAS DE OPTIMIZACION LINEAL**

El Modelado es un arte, y requiere entrenamiento y práctica.  
 Los 6 ejemplos siguientes muestran una variedad de problemas que pueden ser abordados desde la PL.

**2.1) Problema de la Dieta “ideal”.**

Cual es la dieta ideal? Una dieta ideal debería satisfacer los requerimientos nutricionales básicos, económicos, ser variado y ser agradable al paladar.

Asumiendo que la lista de alimentos disponibles es la siguiente :

Alimento	Cantidad (dosis)	Energia (kcal) (Kcal)	Proteinas (g)	Calcium (mg)	Precio (Cents./dosis)	Limites (dosis/dia)
Cereales	28g	110	4	2	3	4
Pollo	100g	205	32	12	24	3
Huevos	2 grandes	160	13	54	13	2
Leche	237 cc	160	8	285	9	8
Dulces-Galletitas	170g	420	4	22	20	2
Carne	260g	260	14	80	19	2

De acuerdo con los nutricionistas, una dieta satisfactoria debe tener al menos 2000kcal de energía, 55 g de proteínas, y 800 mg de calcio (las vitaminas y hierro serán aportadas a través de pastillas). Se han impuesto restricciones sobre el total de dietas por día de cada alimento, para atender el requerimiento de variedad.

Cual es la ‘mejor’ dieta que cumpla con el criterio de mínimo costo?

**(a) Formular el PL asociado.**

$$\begin{aligned} \text{Min. } Z &= 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6 \\ \text{s. r.} \quad & 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000 \\ & 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55 \\ & 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_3 \leq 2 \\ & x_4 \leq 8 \\ & x_5 \leq 2 \\ & x_6 \leq 2 \\ & x_i \geq 0 \text{ (para todo } i) \end{aligned}$$



### 2.2) Programación de Recursos Humanos (El caso de un Restaurante)

Consideremos la situación de un restaurante que abre los 7 días de la semana. En base a la experiencia del manager, para atender el público se requieren un número de trabajadores por día que se resume en el cuadro siguiente :

	<b>Lunes</b>	<b>Martes</b>	<b>Miércoles</b>	<b>Jueves</b>	<b>Viernes</b>	<b>Sábado</b>	<b>Domingo</b>
<b>Total</b>	14	13	15	16	19	18	11

Cada trabajador tiene un régimen de trabajo de 5 días consecutivos, y luego toma 2 días de descanso, durante todo el año.

De qué manera se puede cumplir con los requerimientos de servicio del restauran minimizando el número de trabajadores a contratar?

**(a) Formular el PL asociado.**

Variable de Decisión :  $x(i) \Rightarrow$  el total de trabajadores que empiezan su secuencia de 5 días el día (i).

- $x_1$ : trabaja del lunes al viernes
- $x_2$ : trabaja del martes al sábado
- $x_3$ : trabaja del miércoles al domingo
- $x_4$ : trabaja del jueves al lunes
- $x_5$ : trabaja del viernes al martes
- $x_6$ : trabaja del sábado al miércoles
- $x_7$ : trabaja del domingo al jueves

$$\text{Min. } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

s. r.

- $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 14$
- $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 16$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$
- $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 18$
- $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$
- $x_i \geq 0$  (para todo  $i$ )

### 2.3) Optimización de una Cartera de Inversiones

Considere que el Grupo Asesor financiero tiene un monto de \$100.000.000 para ser colocado en varias categorías de inversiones. El cuadro siguiente describe las 5 categorías, con su respectivo retorno y riesgo asociado.

Categoría	Retorno	Riesgo (en %)
1ra Hipoteca	9	3
2nda Hipoteca	12	6
Prestamos Personales	15	8
Prestamos Comerciales	8	2
Certificados/Bonos	6	1

El capital no invertido en alguna de estas categorías, es colocado en una Caja de Ahorro sin riesgo y con un retorno del 3%. El objetivo para el Grupo Asesor es asignar el dinero a cada una de las categorías para cumplir con las metas siguientes :

- (a) Maximizar el retorno por \$
- (b) Que el riesgo promedio no supere el 5% ( sobre el dinero invertido)
- (c) Invertir al menos 20% en Préstamos comerciales
- (d) El monto combinado en 2ndas Hipotecas y Prestamos personales no podrá ser mayor que el monto en 1era Hipotecas.



• **Formular el PL asociado.**

- a. La variable de Decisión :  $x_i$  representa el monto invertido en la categoría de inversión (i).  
b. Las Restricciones :

b.1 El Riesgo promedio no debe superar el 5% de la inversión.

$$\frac{3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 + x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 5$$

Simplificando para disponer de una Restricción lineal :

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 \leq 5$$

b.2 Prestamos comerciales.

$$x_4 \geq 0.2 [x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5]$$

o sea

$$-2x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + 0.8x_4 - 0.2x_5 \geq 0$$

b.3 La Restricción (d)

$$x_2 + x_3 - x_1 \leq 0$$

Lo que da como formulación final del PL :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 9x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 8x_4 + 6x_5 + 3x_6 \\ \text{s. r.} & \\ & -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 \leq 5 \\ & -2x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + 0.8x_4 - 0.2x_5 \geq 0 \\ & x_2 + x_3 - x_1 \leq 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ (para todo } i) \end{aligned}$$

---

## 2.4) Plan multiperiodo de Inversiones

Se trata de gestionar una cartera de inversiones para un horizonte de 6-años. Al inicio están disponibles \$1000, y en cada periodo se puede invertir en una o más de las opciones siguientes :

- Caja de Ahorro (A) con un retorno anual del 5%
- Opción (Y) con una maturity de 2-años, y un retorno total de 12% si compramos ahora o sino 11% más adelante
- Opción Z, con una maturity de 3-años, y un retorno total de 18%
- Opción W, con una maturity de 4-años, y un retorno total de 24%

Con el objetivo de simplificar, se asumirá que cada opción puede ser comprada en cualquier "denominación" (en caso contrario se debería emplear la programación entera o dinámica).

Se pueden hacer movimientos (depósitos /retiros) en la Caja de Ahorro en cualquier momento.

Se pueden comprar Opciones Y todos los años, salvo en el año 3 .

Se pueden comprar Opciones Z todos los años, después del 1er año .

La opción W, disponible en este momento, es una oportunidad única.



(a) **Formular el PL asociado.**

**Las Variables de Decisión.**

Sea  $A_t$  el monto invertido en la opción A al inicio del año, y de manera similar  $Y_t$ ,  $Z_t$  y  $W_t$ .

El problema es un tipo de gestión de inventarios. En un año dado, el monto de dinero que se traslada desde al año anterior, más el retorno de las colocaciones que llegan a madurez ese año, debe ser igual al monto invertido en nuevas colocaciones más el monto de dinero que se dejó para el año siguiente.

Hay una diferencia: el inventario crece mientras está almacenado! En los problemas de inventario, el valor del stock decrece en el tiempo debido a problemas de mantenimiento, obsolescencia, y esto puede ser reflejado en un tasa de “interés” negativa).

**La Función de Objetivo.**

$$Z = 1.05 A_6 + 1.11 Y_5 + 1.18 Z_4$$

**Las Restricciones.**

$$\begin{aligned} \text{En } t = 1 & \Rightarrow A_1 + Y_1 + W_1 = 1000 \\ \text{En } t = 2 & \Rightarrow A_2 + Y_2 + Z_2 = 1.05 A_1 \\ \text{En } t = 3 & \Rightarrow A_3 + Z_3 = 1.05 A_2 + 1.12 Y_1 \\ \text{En } t = 4 & \Rightarrow A_4 + Y_4 + Z_4 = 1.05 A_3 + 1.11 Y_2 \\ \text{En } t = 5 & \Rightarrow A_5 + Y_5 = 1.05 A_4 + 1.18 Z_2 + 1.24 W_1 \\ \text{En } t = 6 & \Rightarrow A_6 = 1.05 A_5 + 1.11 Y_4 + 1.18 Z_3 \end{aligned}$$

**No Negatividad** :  $A_t, Y_t, Z_t$  y  $W_t \geq 0$

**Cuadro Resumen : Las Inversiones posibles en un horizonte de 6 años**

	1	2	3	4	5	6	7
<b>A(t)</b>	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">5%</span> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">5%</span> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">5%</span> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">5%</span> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">5%</span> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">5%</span> </div>						
<b>Y(t)</b>	$Y_1$				$Y_5$		
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">12%</span> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">12%</span> </div>						
<b>Z(t)</b>		$Z_2$					
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">11%</span> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">11%</span> </div>						
			$Z_3$				
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">18%</span> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">18%</span> </div>						
<b>W(t)</b>	$W_1$						
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span style="font-size: 2em;">→</span> <span style="margin-left: 10px;">24%</span> </div>						



### 2.5) Programación multiperiodo de la Producción .

La empresa Tec-Systems requiere atender en los próximos 4 trimestres la demanda de Notebooks de su clientela compuesta de grandes empresas y de instituciones educativas.

La demanda estimada a lo largo de los próximos 4 trimestres es de : 7000, 15000, 10000, 8000. La empresa dispone en inventario de 5000 Notebooks.

La empresa Tec-Systems dispone de suficiente capacidad para ensamblar 10000 PC por trimestre, a un costo de \$2000 por Notebooks. Empleando horas extras , puede ensamblar 2500 Notebooks adicionales a un costo de \$2200 por unidad. Los Notebooks ensamblados en un trimestre pueden atender la demanda de ese trimestre, o pueden mantenerse en inventario para atender una demanda posterior. Cada computadora en inventario cuesta \$100 por concepto de costo de almacenamiento.

Cual debería ser la estrategia de Tec-Systems para atender su clientela de Notebooks al mínimo costo?

#### (a) Formular el PL asociado.

La decisión está centrada en :

- cuantas computadoras ensamblar en cada periodo en horario normal,
- cuantas empleando horario extra, y
- cual debe ser el nivel de inventario en cada periodo.

#### Las Variables de Decisión.

Si  $t=1,2,3,4$  representa cada uno de los periodos, y  $x(t)$  el total de computadoras producidas en el periodo  $t$  en horario normal, y  $y(t)$  el total de computadoras empleando horario extra.

El inventario al final del periodo  $t$  será representado por :  $i(t)$ .

#### La Función de Objetivo.

$$Z = 2000x_1 + 2000x_2 + 2000x_3 + 2000x_4 + 2200y_1 + 2200y_2 + 2200y_3 + 2200y_4 + 100 i_1 + 100i_2 + 100 i_3$$

#### Las Restricciones.

- En el 1er Trimestre.  
Los límites de producción en el periodo son :  $x_1 \leq 10000, y_1 \leq 2500$

En el periodo el inventario al inicio del periodo y la producción del periodo debe atender la demanda o termina incrementando el inventario al final del periodo:

$$5000 + x_1 + y_1 = 7000 + i_1$$

- En el 2do Trimestre.  
Los límites de producción en el periodo son :  $x_2 \leq 10000, y_2 \leq 2500$   
La restricción de demanda/inventario se escribe:  $i_1 + x_2 + y_2 = 15000 + i_2$
- En el 3er Trimestre.  
Los límites de producción en el periodo son :  $x_3 \leq 10000, y_3 \leq 2500$   
La restricción de demanda/inventario se escribe:  $i_2 + x_3 + y_3 = 10000 + i_3$
- En el último Trimestre.  
Los límites de producción son :  $x_4 \leq 10000, y_4 \leq 2500$   
La restricción de demanda/inventario se escribe:  $i_3 + x_4 + y_4 = 8000$