



Material de Apoyo 5

ADMINISTRACIÓN DE PROYECTOS CON PERT / CPM (Hillier & Liberman Capítulo 10)

Antes de comenzar a analizar cada una de las técnicas, recordemos la definición del glosario del Material de Apoyo 4:

PERT – *Program Evaluation and Review Technique, Técnica de evaluación y revisión de programas.* Se emplea para ayudar en el planeamiento y control de proyectos, determinando la probabilidad de cumplir con fechas de entrega específicas. Identifica los cuellos de botella y señala en qué puntos debe hacerse el mayor esfuerzo para no tener retrasos.

CPM – *Critical Path Method, Método del Camino Crítico.* Determina el tiempo y costo que debe emplearse en cada actividad para cumplir con el tiempo de terminación del proyecto que se programó a un costo mínimo.

1. EJEMPLO PROTOTIPO

Para analizar estas técnicas utilizaremos un ejemplo prototipo planteado en el texto de referencia (H&L pág. 469):

La compañía RELIABLE CONSTRUCTION acaba de ganar una licitación de US\$ 5.4 millones para construir una nueva planta para un fabricante importante. El fabricante necesita que la planta esté en operación en un año. Por lo tanto, el contrato incluye las siguientes cláusulas:

Una multa de US\$ 300.000 si Reliable no termina la construcción en el término de 47 semanas a partir de ahora.

Para proporcionar un incentivo adicional por la construcción rápida, se pagará un bono de US\$ 150.000 si la planta queda terminada en 40 semanas.

Reliable ha asignado a su mejor director de construcción, David Perty, a este proyecto para asegurar que marche a tiempo. Él acepta el reto de realizarlo conforma la programa y tal vez terminarlo antes. Sin embargo, como duda que sea factible terminar en 40 semanas sin incurrir en costos excesivos, ha decidido centrar su planeamiento inicial en cumplir con la fecha límite de 47 semanas.

El Sr. Perty necesitará hacer los arreglos para cierto números de brigadas que realicen las distintas actividades de construcción en diferentes tiempos. La tabla siguiente muestra su lista de actividades para el proyecto:



Actividad	Descripción de la actividad	Precedentes inmediatos	Duración estimada
A	Excavación	----	2 semanas
B	Colocar los cimientos	A	4 semanas
C	Levantar paredes	B	10 semanas
D	Colocar el techo	C	6 semanas
E	Instalar la plomería exterior	C	4 semanas
F	Instalar la plomería interior	E	5 semanas
G	Aplanados exteriores	D	7 semanas
H	Pintura exterior	E, G	9 semanas
I	Instalar el cableado eléctrico	C	7 semanas
J	Aplanados interiores	F, I	8 semanas
K	Colocar pisos	J	4 semanas
L	Pintura interior	J	5 semanas
M	Colocar accesorios exteriores	H	2 semanas
N	Colocar accesorios interiores	K, L	6 semanas

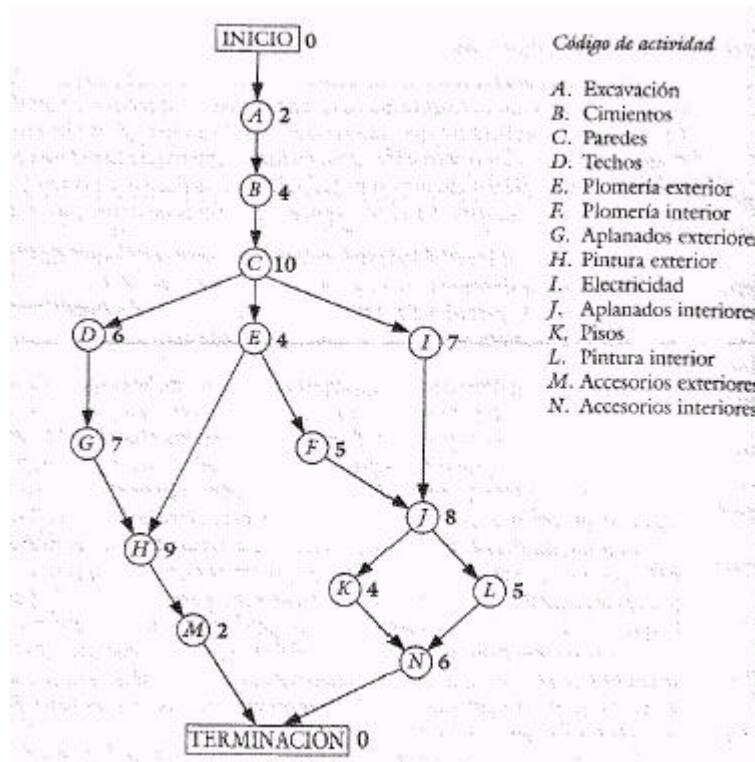
La tercera columna proporciona información importante para la programación de las brigadas. Para una actividad dada, sus **predecesores inmediatos** (tercera columna de la tabla) son aquellas actividades que deben terminarse no más tarde del tiempo de inicio de la actividad dada. Cuando una actividad dada tiene más de un predecesor inmediato, todos deben estar terminados antes de iniciar la actividad.

La cuarta columna son las estimaciones del tiempo que debe tomar cada actividad si se realiza de manera normal. La suma de los tiempos estimados da un total de 79 semanas, que es mucho más que la fecha de entrega del proyecto. Pero, algunas actividades se pueden realizar en paralelo, lo que reducirá de modo sustancial el tiempo de terminación.

Redes de proyectos

Una red usada para representar un proyecto se llama red de proyecto. Una red de proyecto consiste en cierto número de *nodos* y *arcos* que van desde algún nodo a otro. La red de proyecto debe contener la siguiente información:

- ⇒ actividades individuales al nivel de detalle deseado, representadas por los nodos;
- ⇒ relaciones de precedencia, representadas por medio de los arcos;
- ⇒ duración estimada de cada actividad.



Así, la red de proyecto muestra, de una sola mirada, las relaciones de precedencia entre todas las actividades (más el inicio y la terminación del proyecto). El número al lado del nodo para cada actividad registra la duración estimada (en semanas) de esa actividad.

Ruta crítica

Si nos preguntamos, ¿cuánto tiempo debe tomar el proyecto con esta precedencia de actividades y estas duraciones estimadas?, lo relevante es la longitud de cada trayectoria a través de la red.

Trayectoria a través de la red de proyecto es una de las rutas que siguen los arcos desde el nodo INICIO hasta el nodo TERMINACIÓN. La **longitud de una trayectoria** es la suma de las duraciones (estimadas) de las actividades en la trayectoria.

En este ejemplo prototipo hay seis trayectorias que son las siguientes.

Trayectoria	Longitud
INICIO -> A -> B -> C -> D -> G -> H -> M -> TERMINACIÓN	40 semanas
INICIO -> A -> B -> C -> E -> H -> M -> TERMINACIÓN	31 semanas
INICIO -> A -> B -> C -> E -> F -> J -> K -> N -> TERMINACIÓN	43 semanas
INICIO -> A -> B -> C -> E -> F -> J -> L -> N -> TERMINACIÓN	44 semanas
INICIO -> A -> B -> C -> I -> J -> K -> N -> TERMINACIÓN	41 semanas
INICIO -> A -> B -> C -> I -> J -> L -> N -> TERMINACIÓN	42 semanas



Así dadas las longitudes ¿cuál debe ser la duración del proyecto (estimada), es decir, el tiempo total requerido en cualquier trayectoria para terminar el proyecto?.

La **duración del proyecto** (estimada) es igual a la longitud de la trayectoria más larga a través de la red de proyecto. Esta trayectoria más larga se llama **ruta crítica**. Si existe un empate entre varias trayectorias para la longitud más larga, todas son rutas críticas.

Entonces para el proyecto que tenemos de ejemplo, la ruta crítica es la cuarta, con una duración estimada de 44 semanas. Entonces, si no ocurren retrasos, el tiempo total requerido para terminar el proyecto debe ser alrededor de 44 semanas. Las actividades en esa ruta crítica son las actividades cuello de botella críticas en las que debe evitarse cualquier demora en su terminación para prevenir que la terminación del proyecto se atrase. Esta es información muy importante porque es en estas actividades donde se debe prestar la mayor atención para cumplir con el programa de todo el proyecto. Además, si se decide reducir la duración del proyecto, éstas son las principales actividades donde deben hacerse cambios para reducir sus duraciones.

Este procedimiento que vimos para identificar la ruta crítica no es eficiente para proyectos grandes, pero PERT / CPM utiliza un procedimiento mucho mejor.



2. PROCEDIMIENTO DE PROGRAMACIÓN CON PERT / CPM

Este procedimiento consta de tres pasos. Comienza determinando los siguientes dos conceptos para cada actividad (**PASO 1**):

Tiempo de Inicio más Cercano (IC) para una actividad dada: tiempo de inicio de una actividad si no ocurren retrasos en el proyecto.

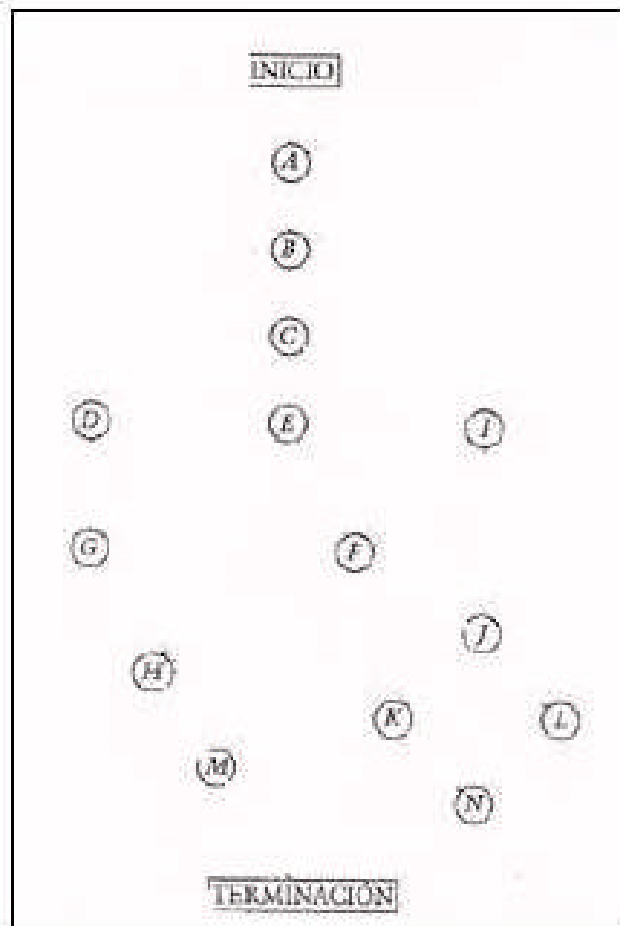
Tiempo de Terminación más Cercano (TC) para una actividad dada: tiempo de terminación de una actividad si no existen retrasos en el proyecto.

Estos tiempos se definen de la siguiente forma:

IC = máx (TC de los predecesores inmediatos)

TC = IC + duración estimada de la actividad

Aplicar estas definiciones para completar el IC y el TC para cada actividad del proyecto prototipo (**PROGRAMA DE TIEMPO MÁS CERCANO**).





Ahora es importante recordar que el programa obtenido con este procedimiento supone que la duración real de cada actividad será la misma que su duración estimada (no existen retrasos). ¿Qué ocurre si alguna actividad toma más tiempo del esperado? ¿Retrasará esto la terminación del proyecto? Quizás, pero no necesariamente. Depende de qué actividad se atrase y de la cantidad de retraso.

El **PASO 2** se centra en determinar cuánto tiempo más tarde que el indicado en la red de proyecto anterior (IC y TC) puede iniciar o terminar una actividad sin retrasar la terminación el proyecto.

De acuerdo a esto podemos analizar dos conceptos más:

Tiempo de Inicio más Lejano (IL) para una actividad dada: tiempo más lejano para comenzarla sin que se retrase la terminación del proyecto.

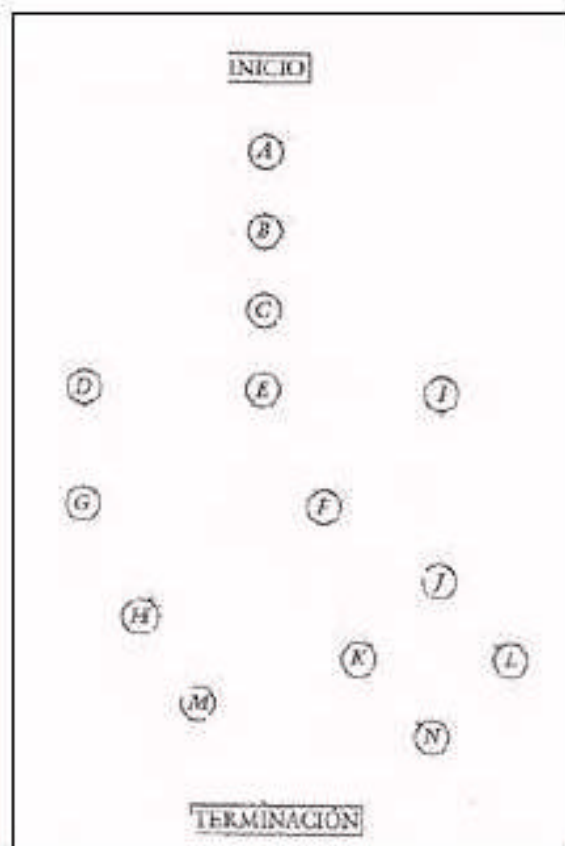
Tiempo de Terminación más Lejano (TL) para una actividad dada: tiempo más lejano posible para terminarla sin que se retrase la terminación del proyecto.

Estos tiempos se definen de la siguiente forma:

$$IL = TL - \text{duración estimada de la actividad}$$

$$TL = \min (IL \text{ de los sucesores inmediatos })$$

Aplicar estas definiciones para completar el IL y el TL para cada actividad del proyecto prototipo (**PROGRAMA DE TIEMPO MÁS LEJANO**).





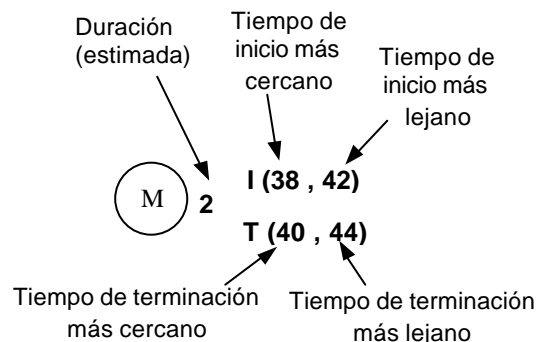
Este programa representa el “programa de la última oportunidad”: incluso si una actividad comienza y termina tan tarde como se indica en la figura, todavía es posible evitar que se retrase la terminación del proyecto a más de 44 semanas, siempre y cuando no haya demoras subsecuentes en el programa. Sin embargo, para dar un margen para demoras no esperadas, el administrador tendría que preferir apegarse al *programa del tiempo más cercano* elaborado previamente.

Para una actividad en particular, si los tiempos de inicio y terminación del *programa de tiempo más lejano* son más tardíos que los tiempos correspondientes al *programa de tiempo más cercano*, entonces esta actividad tiene una **holgura** en el programa.

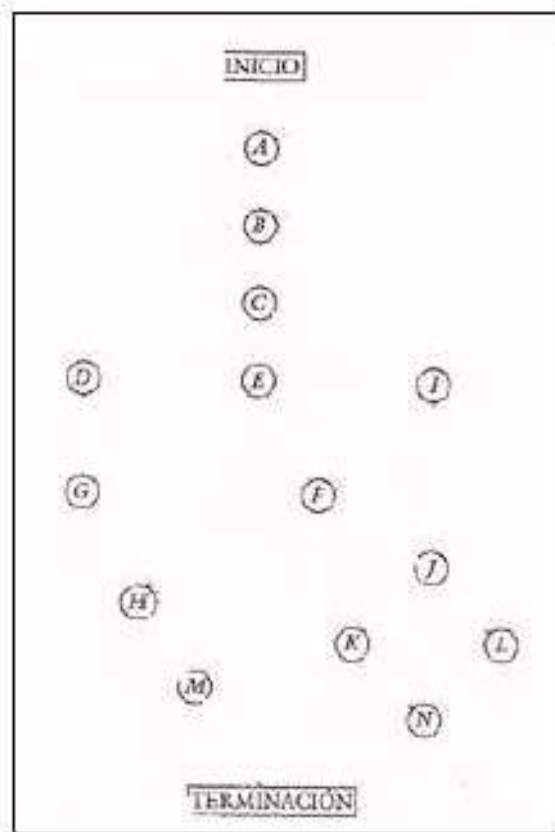
El último paso (**PASO 3**) en el procedimiento es identificar su holgura y después usar esta información para encontrar la **ruta crítica**.

Identificación de holguras en el programa

Para identificar la holgura, es conveniente combinar los tiempos más lejanos del programa del paso 2 y los tiempos más cercanos del programa del paso 1 en una sola figura. Si usamos como ejemplo la actividad M, la información se presenta como sigue al lado del nodo que representa la actividad:



A partir de esta información realizar éste diagrama para todas las actividades.



La figura anterior nos facilita ver cuánta holgura tiene cada actividad. La **holgura** para una actividad representa el retraso que se puede tolerar sin retrasar la terminación del proyecto. Se calcula como la diferencia entre el tiempo de terminación más lejano y el tiempo de terminación más cercano de la actividad.

$$\text{Holgura} = \text{TL} - \text{TC}$$

En el caso de la actividad M la holgura es $44 - 40 = 4$. Esto indica que la actividad M se puede retrasar 4 semanas a partir de su tiempo más cercano programado sin retrasar la terminación del proyecto en la semana 44. Podemos armar una tabla con la holgura de cada actividad:

Actividad	Holgura (TL - TC)
A	0
B	0
C	0
D	4
E	0
F	0
G	4
H	4
I	2
J	0
K	1
L	0
M	4
N	0



Algunas de las actividades tienen *holgura cero*; esto indica que cualquier demora en estas actividades retrasará todo el proyecto. **Esta es la manera en que PERT / CPM identifica la o las rutas críticas. Cada actividad con holgura cero está en una ruta crítica de la red de proyecto**, de tal manera que cualquier retraso a lo largo de esta ruta retrasará la terminación del proyecto.

Actividad	Holgura (TL - TC)	¿Está en la ruta crítica?
A	0	Sí
B	0	Sí
C	0	Sí
D	4	No
E	0	Sí
F	0	Sí
G	4	No
H	4	No
I	2	No
J	0	Sí
K	1	No
L	0	Sí
M	4	No
N	0	Sí

Entonces la **ruta crítica** es:

INICIO -> A -> B -> C -> E -> F -> J -> L -> N -> TERMINACIÓN

Este resultado se encontró por un método diferente al principio del ejemplo. Las actividades en esta ruta son las que se deben supervisar con mucho cuidado para que el proyecto termine a tiempo.



3. MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE EN LAS DURACIONES DE LAS ACTIVIDADES

Reliable incurrirá en una multa de US\$ 300.000 si no termina a tiempo. Por lo tanto, es importante conocer la probabilidad de cumplir con la fecha. Siempre existe una incertidumbre acerca de cuánto tiempo será en realidad necesario para cada actividad. En la práctica, la duración de cada actividad es una *variable aleatoria* que tiene alguna distribución de probabilidad.

Se puede tomar en cuenta esta incertidumbre con el cálculo de tres tipos de estimaciones para la duración de una actividad a fin de obtener información básica acerca de su distribución de probabilidad. Las tres estimaciones son:

Estimación más probable (m) = estimación del valor más probable de la duración.

Estimación optimista (o) = estimación de la duración en las condiciones más favorables

Estimación pesimista (p) = estimación de la duración en las condiciones más desfavorables

Asumiendo que la **distribución de probabilidad de la duración** de cada actividad en el proyecto, es una **distribución BETA**, se emplearán como estimadores de la **duración media** y de la **varianza** los siguientes estadísticos:

$$\mu = \frac{o + 4m + p}{6}$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{p - o}{6} \right]^2$$

Para calcular la probabilidad de que la duración del proyecto no será mayor a las 47 semanas, es necesario obtener la siguiente información sobre la distribución de probabilidad de la duración del proyecto total:

1. ¿Cuál es la *media* de esta distribución (μ_p)?
2. ¿Cuál es la *varianza* de esta distribución (σ_p^2)?
3. ¿Cuál es la forma de la distribución?

Ruta crítica media: es la ruta a través del proyecto que sería la ruta crítica si la duración de cada actividad fuera igual a su *media*.

PERT realiza tres simplificaciones para hallar la probabilidad que estamos buscando:

Simplificación 1: la *ruta crítica media* es la *trayectoria más larga a través de la red de proyecto*. Esta afirmación permite calcular μ_p pero es necesario dos simplificaciones más para obtener σ_p^2 .



Simplificación 2 las duraciones de las actividades en la ruta crítica media son estadísticamente independientes. Entonces,

μ_p = suma de medias de las duraciones para las actividades en la ruta crítica media

σ_p^2 = suma de varianzas de las duraciones para las actividades en la ruta crítica.

Calculando las medias y varianzas para cada actividad (mediante las fórmulas vistas más arriba) y sumando las mismas se obtiene que:

$$\mu_p = 44, \sigma_p^2 = 9$$

Ahora se necesita una aproximación para la forma de la distribución de probabilidad de la duración del proyecto.

Simplificación 3. la duración del Proyecto (T) sigue una distribución de probabilidad Normal.

$T \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$ cuyos parámetros estimados según la simplificación 2 son:

$$\mu_p = \sum \mu_j$$

$$\sigma_p^2 = \sum \sigma_j^2$$

donde $j = 1, 2, \dots, n$ representa el índice de las n actividades sobre la ruta crítica media.

Ahora podemos determinar (aproximadamente) la probabilidad de terminar el proyecto de Reliable dentro de las 47 semanas.

Si T es la duración del proyecto y d es la fecha de entrega del proyecto, entonces la probabilidad de cumplir con la fecha de entrega será estimada como:

$$\text{Prob}(T \leq d) = \text{Prob}\left[Z \leq \frac{d - \mu_p}{\sigma_p}\right] \text{ donde } Z \text{ representa la Distribución Normal Estándar.}$$

En el ejemplo prototipo, $\text{Prob}(T \leq d) = 1 - \text{Prob}(T \geq d) = 1 - 0.1587 \cong 0.84$

Debe quedar claro que esto es sólo una aproximación de la probabilidad verdadera de cumplir con la fecha de entrega el proyecto. Más aún, debido a la simplificación 1, normalmente se obtiene una probabilidad un poco mayor que la verdadera. Por lo tanto, el director del proyecto debe ver esta Probabilidad sólo como una guía burda de la oportunidad de cumplir con la fecha de entrega sin tomar nuevas medidas costosas para tratar de reducir la duración de algunas actividades.



4. TRUEQUE TIEMPO Y COSTO

El Sr. Perty (director del proyecto) está preocupado porque quizás tenga sólo una oportunidad de 70 a 80% de cumplir con la terminación del proyecto a tiempo con el plan actual. Entonces decide investigar cuánto dinero adicional costaría reducir la duración esperada del proyecto a cerca de 40 semanas. Si el **trueque tiempo y costo** es favorable, la compañía quizás pueda ganar el bono de US\$ 150.000 por terminar a más tardar en 40 semanas. Entonces la pregunta que se hace es la siguiente: *Si se gasta más dinero para acelerar el proyecto, ¿cuál es la manera menos costosa de intentar cumplir con el tiempo de terminación fijado (40 semanas)?*

Para responder esto vamos a ver algunos conceptos importantes:

Quiebre de una actividad: se refiere a tomar medidas especiales costosas para reducir la duración de una actividad a menos de su valor normal. Estas medidas especiales incluyen el uso de horas extra, contratación temporal de ayuda, uso de materiales especiales que ahorran tiempo, etc.

Quiebre de un proyecto: se refiere a acelerar cierto número de actividades para reducir la duración del proyecto a menos de su valor normal.

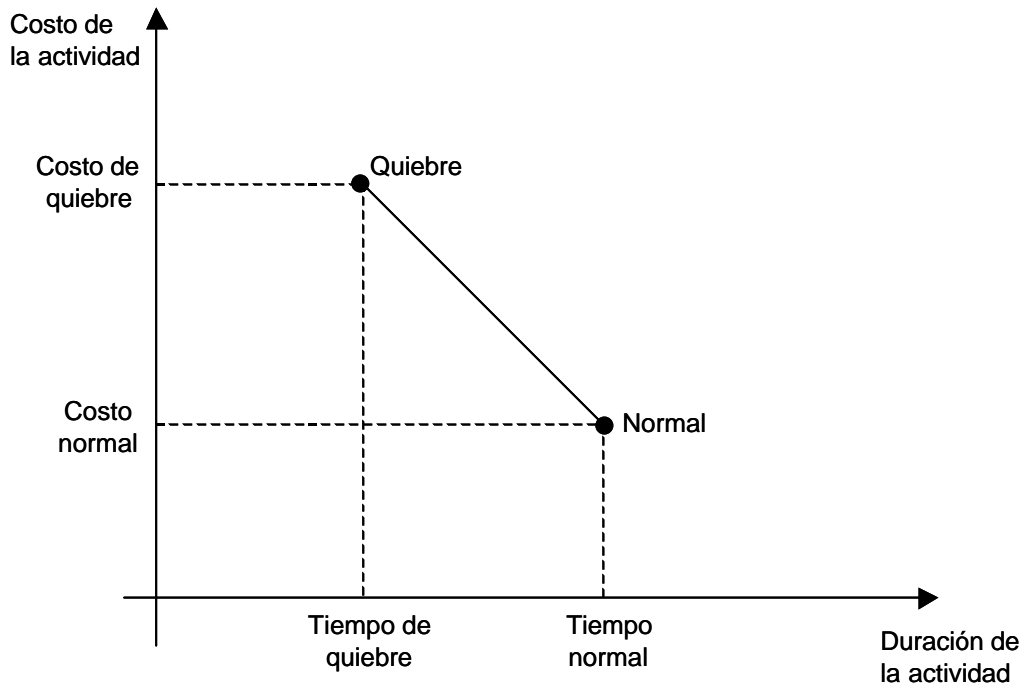
El método CPM de trueques entre tiempo y costo se ocupa de determinar cuánto acelerar (si se hace) cada actividad para reducir la duración prevista del proyecto a un valor deseado.

Los *datos necesarios* para determinar cuánto acelerar una actividad dada están dados por la *gráfica de tiempo-costo* para la actividad (página siguiente). Los dos puntos importantes de esta gráfica son los llamados *normal* y *quiebre*.

Punto normal: para una actividad muestra el tiempo (duración) y el costo de la actividad cuando se realiza de manera normal.

Punto de quiebre: muestra el tiempo y el costo cuando la actividad se acelera por completo, es decir, se forza sin límite de costo para reducir su duración todo lo posible.

Como una aproximación, el CPM supone que estos tiempos y costos se pueden predecir de manera confiable sin incertidumbre significativa.



El director del proyecto le ha pedido a su personal y supervisores que desarrollen estos datos para cada una de las actividades del proyecto de Reliable. Por ejemplo, el supervisor de la brigada responsable de colocar los aplanados indica que si agrega dos empleados temporales y usa tiempo extra podrá reducir la duración de esta actividad de 8 a 6 semanas, que es el mínimo posible. Entonces, el personal estima el costo de un quiebre completo para esta actividad, comparada con la siguiente programación normal de 8 semanas, de la siguiente manera:

Actividad J (colocar aplanados):

Punto normal: tiempo = 8 semanas, costo = US\$ 430.000

Punto de quiebre: tiempo = 6 semanas, costo = US\$ 490.000

Reducción máxima de tiempo = 2 semanas

Costo de quiebre por semana ahorrada = $\frac{\text{US\$ } 490.000 - 430.000}{2} = \text{US\$ } 30.000$

Así se calcula para cada actividad y resulta la tabla siguiente:



Actividad	Tiempo		Costo		Máxima reducción en tiempo	Costo de quiebre por semana ahorrada
	Normal	Quiebre	Normal	Quiebre		
A	2	1	180,000	280,000	1	100,000
B	4	2	320,000	420,000	2	50,000
C	10	7	620,000	860,000	3	80,000
D	6	4	260,000	340,000	2	40,000
E	4	3	410,000	570,000	1	160,000
F	5	3	180,000	260,000	2	40,000
G	7	4	900,000	1,020,000	3	40,000
H	9	6	200,000	380,000	3	60,000
I	7	5	210,000	270,000	2	30,000
J	8	6	430,000	490,000	2	30,000
K	4	3	160,000	200,000	1	40,000
L	5	3	250,000	350,000	2	50,000
M	2	1	100,000	200,000	1	100,000
N	6	3	330,000	510,000	3	60,000

Ahora tenemos que preguntarnos: ¿qué actividades deben acelerarse?

Si sumamos las columnas de costo normal y costo de quiebre se tiene que:

Suma de costos normales = US\$ 4.55 millones,
Suma de costos de quiebre = US\$ 6.15 millones.

La compañía recibirá US\$ 5.4 millones por realizar este proyecto. Esto debe cubrir algunos costos generales además de los costos de las actividades, y deberá proporcionar una ganancia razonable para la compañía. Al desarrollar el presupuesto de US\$ 5.4 millones, la administración de Reliable pensó que esta cantidad proporcionaría una ganancia razonable siempre que el costo total de las actividades se pudiera mantener cercano al nivel de US\$ 4.55 millones. El director sabe que es su responsabilidad mantener el proyecto lo más que se pueda dentro del presupuesto y a tiempo.

Si todas las actividades se realizaran de manera normal, la duración prevista del proyecto sería de 44 semanas como ya hemos visto. Si **todas** las actividades tuvieran un **quiebre completo**, un cálculo similar encontraría que esta duración se reduciría a sólo 28 semanas. Pero el costo sería prohibitivo (6.15 millones). Es claro que la aceleración completa de todas las actividades no es una opción a considerar.

De todas maneras, el director desea investigar la posibilidad de un quiebre parcial o completo de sólo algunas actividades para reducir la duración del proyecto a 40 semanas. *Se debe determinar cuál es la manera menos costosa de acelerar algunas actividades para reducir la duración (estimada) del proyecto a 40 semanas.*

Una técnica para resolver este problema es el **análisis de costo marginal**, que usa la última columna de la tabla anterior para determinar la forma menos costosa de reducir la duración del proyecto 1 semana a la vez.



El camino más sencillo al realizar este tipo de análisis es:

1 - construir una tabla que enumere las rutas a través de la red del proyecto y la longitud actual de cada una.

Actividad de quiebre	Costo de quiebre	Longitud de la ruta					
		ABCDGHM	ABCEHM	ABCEFJKN	ABCEFJLN	ABCIJKN	ABCIJLN
		40	31	43	44	41	42

Como la cuarta trayectoria es la más larga (44 semanas), la única manera de reducir la duración del proyecto una semana es reducir la duración de las actividades en esta ruta una semana.

2 - Comparar el costo de quiebre por semana ahorrada dado en la última columna de la tabla previa **para estas actividades**. El costo menor es US\$ 30.000 para la actividad J. *Por lo tanto, el primer cambio es acelerar la actividad J lo suficiente para reducir su duración una semana.*

3 - Este cambio da como resultado una reducción de una semana en la longitud de **cada trayectoria** que incluye la actividad J (tercera, cuarta, quinta y sexta rutas). Así elaboramos el segundo renglón de la tabla anterior.

Actividad de quiebre	Costo de quiebre	Longitud de la ruta					
		ABCDGHM	ABCEHM	ABCEFJKN	ABCEFJLN	ABCIJKN	ABCIJLN
		40	31	43	44	41	42
J	US\$ 30.000	40	31	42	43	40	41
J	US\$ 30.000	40	31	41	42	39	40
F	US\$ 40.000	40	31	40	41	39	40
F	US\$ 40.000	40	31	39	40	39	40
US\$ 140.000							

Como la cuarta ruta todavía es la más larga (43 semanas), se repite el proceso para encontrar la actividad en ella que cuesta menos acortar. De nuevo es la actividad J, pues la penúltima columna de la tabla de tiempo y costo de quiebre (máxima reducción en tiempo) indica que se permite una reducción máxima de 2 semanas para esta actividad. Esta segunda reducción en la actividad J lleva al tercer renglón en la tabla.

En este punto, la cuarta trayectoria todavía es la más larga (42 semanas), pero **la actividad J no puede acelerarse más**. Entre las otras actividades de esta ruta, la F es ahora la de reducción menos costosa (US\$ 40.000 por semana). Por lo tanto, se acelera esta actividad una semana para obtener el cuarto renglón y luego (debido a que se permite una reducción máxima de dos semanas) se acelera otra semana para obtener el último renglón de la tabla. La trayectoria más larga (empate entre la primera, cuarta y sexta rutas) tiene ahora la longitud deseada de 40 semanas, por lo que NO se requiere más quiebre.



El costo total del quiebre de las actividades J y F para reducir la duración del proyecto a 40 semanas se calcula sumando los costos de la segunda columna en la tabla anterior (un total de US\$ 140.000). Como este monto es un poco menos que el bono de US\$ 150.000 por terminar a más tardar en 40 semanas, puede parecer que el director debe proceder con esta solución. Sin embargo, debido a la incertidumbre respecto a las duraciones de las actividades, concluye que quizá no debería reducir nada del proyecto. Además de supervisar el programa conforme se desarrolla el proyecto (y tomar una decisión más adelante respecto al quiebre), el director observará de cerca los costos para intentar mantenerlos dentro del presupuesto.

Un comentario importante es que, reducir las actividades F y J a sus tiempos de quiebre conduce a tener tres rutas críticas a través de la red, ya que las tres empatan como la más larga, cada una con longitud de 40 semanas. Si se necesitara más quiebre, el siguiente paso requeriría estudiar las actividades en las tres trayectorias para encontrar la manera menos costosa de acortar las tres rutas una semana).

Con redes más grandes, el análisis de costo marginal se puede convertir en algo difícil de manejar. El procedimiento CPM estándar es aplicar Programación Lineal.



EJEMPLO (I)

Consideremos un Proyecto representado en el Diagrama siguiente con la unidad de tiempo para la duración de las actividades en días :

Actividad	Predecesor Inmediato	Duración Esperada
A	---	4
B	---	6
C	B	8
D	A, C	10

Los datos sobre el punto Normal y el punto de Quiebre de cada una de las 4 actividades son resumidos en la Tabla siguiente :

Actividad	Tiempo Normal	Tiempo de Quiebre	Costo Normal	Costo de Quiebre
A	4	3	80	105
B	6	4	180	250
C	8	5	200	320
D	10	6	350	530

Se Pide :

- (a) Identificar la Ruta Crítica :

Ruta Crítica : B → C → D

Actividad	Inicio Cercano	Terminación Cercana	Inicio Lejano	Terminación Lejana	Holgura	Ruta Crítica
A	0	4	10	14	10	--
B	0	6	0	6	0	Si
C	6	14	6	14	0	Si
D	14	24	14	24	0	Si

- (b) Calcular el tiempo requerido para completar el Proyecto y su costo correspondiente.

El Tiempo para completar el Proyecto es de **24 días**.

El Costo del Proyecto es = $80 + 180 + 200 + 350 =$ **\$810**

- (c) Frente a las nuevas condiciones de mercado, se requiere que el proyecto esté completado en 18 días, identificar el tiempo de quiebre óptimo y el costo mínimo para lograrlo.

A partir de los datos del Proyecto original se calculó la siguiente Tabla :



Actividad	Límite de Quiebre	Costo de Quiebre /día
A (1-3)	4 - 3 = 1	(105-80)/(4-3) = 25
B (1, 2)	6 - 4 = 2	(250-180)/(6-4) = 35
C (2, 3)	8- 5 = 3	(320-200)/(8-5) = 40
D (3, 4)	10 - 6 = 4	(530-350)/(10-6) = 45

Actividad	Tiempo		Costo		Límite Quiebre	Costo Quiebre por día
	Normal	Quiebre	Normal	Quiebre		
A	4	3	80	105	1	25
B	6	4	180	250	2	35
C	8	5	200	320	3	40
D	10	6	350	530	4	45
TOTAL			810	1205		

La actividad **B** será reducida de 2 días.

A partir del cálculo de la nueva Ruta Crítica tenemos :

- Ruta Crítica : B → C → D
- Tiempo para completar el Proyecto = 22 días
- Costo del Proyecto = 810 + 2 * 35 = \$880

El Límite de Quiebre de B = 2 y este ha sido alcanzado, el próximo paso es considerar una nueva actividad crítica con el menor “costo de quiebre por día”.

c.2 **La Actividad C es la próxima candidata para el Quiebre** ya que presenta el mínimo “Costo de Quiebre por día”. La reducción posible de la actividad C es 3 días.

La actividad **C** será reducida de 3 días.

A partir del cálculo de la nueva Ruta Crítica tenemos :

- Ruta Crítica : B → C → D
- Tiempo para completar el Proyecto = 19 días
- Costo del Proyecto = 880 + 3 * 40 = \$1000

El Límite de Quiebre de C = 3 y este ha sido alcanzado, el próximo paso es considerar una nueva actividad crítica con el menor “costo de quiebre por día” .

c.3 **La Actividad D es la próxima candidata para el Quiebre** ya que presenta el mínimo “Costo de Quiebre por día”. La reducción posible de la actividad D es 4:

La actividad D puede ser reducida de 4 días, pero para alcanzar el objetivo de 18 días solamente se requiere reducir de 1 día.

Por lo tanto D será reducida de 1 día .

A partir del cálculo de la nueva Ruta Crítica tenemos :

- Ruta Crítica : B → C → D
- Tiempo para completar el Proyecto = 19 días
- Costo del Proyecto = 1000 + 1*45 = \$1045



EJEMPLO II
MANTENIMIENTO DE MAQUINAS
- TRUEQUE TIEMPO-COSTO -

Un proyecto de mantenimiento de dos máquinas involucra 5 actividades. Dado que la administración ha tenido gran experiencia con proyectos similares, se considera que los tiempos (en días) para las actividades de mantenimiento son conocidos y están dados en la Tabla siguiente.

Actividad Descripción	Actividad	Predecesor Inmediato	Duración Esperada
Reparación Maquina 1	A	---	7
Ajustar Máquina 1	B	A	3
Reparación Maquina 2	C	---	6
Ajustar Máquina 2	D	C	3
Probar el Sistema	E	B, D	2

SE PIDE :

- (1) Diseñar la Red del Proyecto.
- (2) Determinar la Ruta Crítica, el tiempo total requerido para finalizar el Proyecto

Actividad	Inicio Cercano	Terminación Cercana	Inicio Lejano	Terminación Lejana	Holgura	Ruta Crítica
A	0	7	0	7	0	Si
B	7	10	7	10	0	Si
C	0	6	1	7	1	---
D	6	9	7	10	1	---
E	10	12	10	12	0	Si

- (3) A partir de la información de Costos Normales y de Quiebre de cada actividad determinar el Costo total del mismo y el Costo Marginal de aceleración por día de cada una de las actividades.

Actividad	Tiempo		Costo		Límite Quiebre	Costo Quiebre por día
	Normal	Quiebre	Normal	Quiebre		
A	7	4	500	800	3	100
B	3	2	200	350	1	150
C	6	4	500	900	2	200
D	3	1	200	500	2	150
E	2	1	300	550	1	250
TOTAL			1700	3100		

- (4) Los niveles actuales de producción, hacen imperativo terminar el Proyecto de mantenimiento en 10 días. Identificar las actividades a acelerar y de cuanto, de tal manera que se minimice el costo total del proyecto.



(5) Diseñar un Programa Lineal para resolver (4) y resolverlo mediante el Solver. Verificar la solución encontrada en (4).

EJEMPLO : MANTENIMIENTO MAQUINAS

Vars=>	ya	yb	yc	yd	ye	xa	xb	xc	xd	xe	Uso	Limite
	1	0	0	0	1	6	9	6	9	10		
"A"	1					1					7	>= 7
"B"		1				-1	1				3	>= 3
"C"			1					1			6	>= 6
"D"				1				-1	1		3	>= 3
"E1"					1		-1			1	2	>= 2
"E2"					1				-1	1	2	>= 2
R7	1										1	<= 3
ya		1									0	<= 1
yb			1								0	<= 2
yc				2							0	<= 2
yd					1						1	<= 1
ye										1	10	<= 10

Función Objetivo						
Coeficientes		100	150	200	150	250
z*		\$350				

Target Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$D\$22	z*	\$0	\$350

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$D\$5	ya	0	1
\$E\$5	yb	0	0
\$F\$5	yc	0	0
\$G\$5	yd	0	0
\$H\$5	ye	0	1
\$I\$5	xa	0	6
\$J\$5	xb	0	9
\$K\$5	xc	0	6
\$L\$5	xd	0	9
\$M\$5	xe	0	10



RESUMEN DE ALGUNAS DEFINICIONES Y FORMULAS BASICAS

1. **Tiempo de Inicio más Cercano (IC)** para una actividad dada = tiempo de inicio de una actividad si no ocurren retrasos en el proyecto.
2. **Tiempo de Terminación más Cercano (TC)** para una actividad dada = tiempo de terminación de una actividad si no existen retrasos en el proyecto.
3. $IC = \max (TC \text{ de los predecesores inmediatos})$
4. $TC = IC + \text{duración estimada de la actividad}$
5. **Tiempo de Inicio más Lejano (IL)** para una actividad dada representa el tiempo más lejano para comenzarla sin que se retrase la terminación del Proyecto.
6. **Tiempo de Terminación más Lejano (TL)** para una actividad dada representa el tiempo más lejano posible para terminarla sin que se retrase la terminación del Proyecto.
7. $IL = TL - \text{duración estimada de la actividad}$
8. $TL = \min (IL \text{ de los sucesores inmediatos})$
9. La **Holgura** para una actividad representa el retraso que se puede tolerar sin retrasar la terminación del proyecto.
10. $Holgura = TL - TC$
11. Asumiendo una distribución de probabilidades BETA para la **duración** de cada actividad en el proyecto, se emplearán como estimadores de la **duración media** y de la **varianza** los siguientes estadísticos :

$$m = \frac{o + 4m + p}{6}$$

$$s^2 = \left[\frac{p - o}{6} \right]^2$$

donde,

m = duración estimada como la más probable.

o = duración estimada como la más favorable (escenario optimista)

p = duración estimada como la más desfavorable (escenario pesimista)



12. Se asume que las duraciones de las actividades en la ruta crítica media son estadísticamente independientes.
13. La duración del Proyecto T sigue una distribución probabilística Normal,

$$T \sim N(\mathbf{m}_p, \mathbf{s}_p^2)$$

cuyos parámetros son estimados bajo el supuesto (12) :

$$\mathbf{m}_p = \sum_j \mathbf{m}_j$$

$$\mathbf{s}_p^2 = \sum_j \mathbf{s}_j^2$$

donde $j = 1, 2, \dots, n$ representa el índice de las n actividades sobre la Ruta Crítica Media.

14. Si T es la duración del Proyecto y d es la fecha de entrega del proyecto, entonces la probabilidad de cumplir con la fecha de entrega será estimada como :

$$\text{Pr ob}(T \leq d) = \text{Pr ob}(Z \leq K_a)$$

Donde $K_a = \frac{d - \mathbf{m}_p}{\mathbf{s}_p}$, y Z representa la Distribución Normal Estándar.