**RESOLUCIÓN del CASO "PROTOTIPO" POR MEDIO DEL MÉTODO SIMPLEX.**

**FORMA ALGEBRAICA Y TABULAR.**
**INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS.**

**Indice de Términos Básicos,**

Forma Estándar Ampliada; Variables de Holgura.
BASE; Variables Básicas y Variable No Básicas
Ecuaciones de la Frontera de Restricción; Ecuaciones de Definición
Soluciones FEV adyacentes, Solución Básica FEV
Variable entrante a la Base; mejor tasa de mejoramiento
Variable básica que sale de la BASE "prueba del cociente mínimo"
Solución FEV Optima; Prueba de *optimalidad.*

**Propiedades de las Soluciones FEV**

- Prop 1 :
  (a) Si el problema tiene exactamente una solución óptima, entonces ésta debe ser una solución FEV
  (b) Si el problema tiene soluciones óptimas múltiples (y una RF no acotada), entonces al menos deben ser soluciones FEV adyacentes
- Prop 2. :
  Existe sólo un número finito de soluciones FEV
- Prop 3 :
  Si una solución FEV no tiene soluciones FEV adyacentes que sean mejores (en términos del valor de la función objetivo Z), entonces no existen soluciones FEV que sean mejores. Por lo tanto, se garantiza que tal solución FEV es una solución óptima (por la propiedad 1), suponiendo nada más que el problema posee al menos una solución óptima (lo que se garantiza si el problema tiene solución factibles y una refión factible acotada)

## A. FORMA ALGEBRAICA del Método SIMPLEX (Interpretación Geométrica)

Retomemos el problema del Wyndor Glass Co (Caso Prototipo visto en clase) el cual está planteado de la siguiente manera:

$$Máx\, 3x_1 + 5x_2$$

Sujeto a:
$$\begin{cases} R1: x_1 \le 4 \\ R2: 2x_2 \le 12 \\ R3: 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

**Preparación para el método símplex (Forma Estandar Ampliada)**

Se introducen las variables de holgura de modo de transformar las desigualdades en igualdades:

$$Máx\, Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$Sujeto.a:$$
$$\begin{cases} R1: x_1 + x_3 = 4 \\ R2: 2x_2 + x_4 = 12 \\ R3: 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0\, x_4 \ge 0; x_5 \ge 0 \end{cases}$$

**TABLA 1:**
**Método SIMPLEX de Resolución del PL Wyndor Glass Co.**
**(Interpretación Geométrica y Algebraica)**

| Secuencia del método | Interpretación geométrica | Interpretación algebraica |
|---|---|---|
| Paso inicial | Seleccione (0, 0) como la solución FEV inicial. | Seleccione $x_1$ y $x_2$ como las variables no básicas (= 0) para la solución BF inicial (0, 0, 4, 12, 18). |
| Prueba de optimalidad | No es óptima porque al moverse por cualquier arista que sale de (0, 0), $Z$ crece. | No es óptima porque al aumentar el valor de cualquier variable no básica ($x_1$ o $x_2$), el valor de $Z$ aumenta. |
| Iteración 1 Paso 1 | Se mueve por la arista sobre el eje $x_2$. | Se aumenta el valor de $x_2$ y se ajustan los valores de las otras variables para que satisfagan el sistema de ecuacioines. |
| Paso 2 | Se detiene al encontrar la primera frontera de restricción ($2x_2 = 12$). | Se detiene cuando el valor de la primera variable básica ($x_3$, $x_4$ o $x_5$) llega a cero ($x_4$). |
| Paso 3 | Se encuentra la intersección del nuevo par de fronteras de restricción: (0, 6) es la nueva solución FEV. | Con $x_2$ como variable básica y $x_4$ no básica, se resuelve el sistema de ecuaciones: (0, 6, 4, 0, 6) es la nueva solución BF. |
| Prueba de optimalidad | No es óptima porque al moverse por la arista que va de (0, 6) hacia la derecha, $Z$ crece. | No es óptima porque al aumentar el valor de una variable no básica ($x_1$), el valor de $Z$ aumenta. |
| Iteración 2 Paso 1 | Se mueve por la arista que va hacia la derecha | Se aumenta el valor $x_1$ y se ajustan los de las demás variables para que satisfagan el sistema de ecuaciones. |
| Paso 2 | Se detiene cuando encuentra la primera frontera de restricción ($3x_1 + 2x_2 = 18$). | Se detiene cuando la primera variable básica ($x_2$, $x_3$ o $x_5$) llega a cero ($x_5$). |
| Paso 3 | Se encuentra la intersección del nuevo par de fronteras de restricción: (2, 6) es la nueva solución FEV. | Con $x_1$ como variable básica y $x_5$ no básica, se resuelve el sistema de eucaciones: (2, 6, 2, 0, 0) es la nueva solución BF. |
| Prueba de optimalidad | (2, 6) es óptima porque al moverse por cualquier arista que sale de (2, 6), $Z$ decrece. | (2, 6, 2, 0, 0) es óptima porque al aumentar el valor de cualquier variable no básica ($x_4$ o $x_5$) el valor de $Z$ disminuye. |

## PASO INICIAL

Seleccionar:

| | |
|---|---|
| Variables NO BÁSICAS (a anular): | $x_1$ , $x_2$ |
| Variables BÁSICAS (a resolver): | $x_3$, $x_4$, $x_5$. |

Es aconsejable que como solución inicial se elija aquella que haga igual a cero las variables de decisión, en caso de que esta sea una solución FEV. Esta solución se obtiene simplemente sustituyendo en el sistema anterior $x_1$ y $x_2$ por cero y resolviendo para el resto de las variables. Siempre que sea posible seleccionar como solución FEV inicial : el punto (0,0)

| | |
|---|---|
| Solución FEV inicial : | ($x_1$ , $x_2$) = (0,0) |
| Solución Básica Factible (BF): | ($x_1$,$x_2$ ,$x_3$, $x_4$, $x_5$.) = ( 0, 0, 4, 12, 18). |
| Valor de la Función Objetivo: | Z = 0 |

Prueba de *Optimalidad* de la Solución FEV.

Como los coeficientes de $x_1$ y $x_2$ en la función objetivo original son ambos estrictamente positivos, la solución hallada no es óptima, ya que el objetivo podría seguir aumentando al aumentar cualquiera de las dos variables de decisión.
Al desplazarse desde el punto (0,0) por el eje de las $x_1$ o $x_2$, Z crece.

**ITERACION Nº 1.**

Paso 1.

Se elige $x_2$ como variable básica entrante a la BASE por tener mejor tasa de mejoramiento que $x_1$ (ver los coeficientes de estas variables en la función objetivo : $c_1=2 < c_2=5$).
Se selecciona desplazarnos por el eje de las $x_2$.

Paso 2.

Para el análisis de la variable básica que sale de la BASE ("prueba del cociente mínimo"):

$$R1: x_3 = 4 \,(no\ hay\ restricción\ sobre\ x_2)$$
$$R2: x_4 = 12 - 2x_2 \geq 0 \Rightarrow 2x_2 \leq 12 \Rightarrow x_2 \leq 6$$
$$R3: 0 + x_5 = 18 - 2x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 9$$

Se sigue el criterio de elegir como variable básica que sale aquella que representa la distancia a la restricción que se alcanza primero al moverse en la dirección de la variable que entra, ya que esa distancia se hace cero primero. Como $x_4$=6 es menor que $x_2$=9, se deduce que $X_4$ es la variable básica que sale (esta desigualdad surge de la restricción R2).
El procedimiento se detiene al encontrar ls primera frontera de restricción: R2 $2x_2 = 12$.

Paso 3.

Se modifica el sistema de ecuaciones de forma de obtener uno equivalente, en el cual la variable que entra a la BASE (en nuestro caso $x_2$ se transforma en variable básica) se encuentre sólo en su ecuación.

El sistema resultante es:

$$Z - 3x_1 + \tfrac{5}{2}x_4 = 30$$
$$x_1 + x_3 = 4$$
$$x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 = 6$$
$$3x_1 - x_4 + x_5 = 6$$

Variables NO BÁSICAS (anular): $x_1$ , $x_4$
Variables BÁSICAS (a resolver): $x_2$, $x_3$, $x_5$.

Resolviendo este sistema, surge que la nueva solución básica factible es:

Nueva Solución Básica Factible (BF): $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.) = (0, 6, 4, 0, 18)$.
Valor de Z $Z = 30$

Reescribimos la primera ecuación: $Z = 30 + 3x_1 - \tfrac{5}{2}x_4$

La Nueva Solución FEV $(x_1,x_2)$ =(0,6) se obtiene en la intersección de la nueva frontera de restricciones : (x1=0; R2)

Prueba de Optimalidad de Solución FEV.

Como el coeficiente de la variable No Básica $x_1$ es todavía estrictamente positivo, no nos encontramos en un óptimo, por lo ya explicado en la iteración anterior.

**ITERACION Nº 2.**

Paso 1.

La nueva variable básica entrante a la BASE es $x_1$, por ser la única que queda con coeficiente estrictamente positivo.
Se decide desplazarse por la arista de la R2 hacia los valores positivos de x1.

Paso 2.

Para identificar cuál es la variable que sale de la BASE, hacemos el análisis o ("prueba del cociente mínimo"):

$$R1: x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4$$
$$R2: x_2 = 6\,(no\ hay\ restricción\ sobre\ x_1)$$
$$R3: x_5 = 6 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2$$

Por la "prueba del cociente mínimo" $x_5$ es menor que $x_3$: la variable básica que sale es $x_5$.
El procedimiento se detiene al encontrar la primera frontera de restricción: (R3) $3x_1 + 2x_2 = 18$.

Paso 3.

Nuevamente se transforma el sistema y resulta:

$$z + \tfrac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$$
$$x_3 + \tfrac{1}{3}x_4 - \tfrac{1}{3}x_5 = 2$$
$$x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 = 6$$
$$x_1 - \tfrac{1}{3}x_4 + \tfrac{1}{3}x_5 = 2$$

Variables NO BÁSICAS (anular): $x_4$ , $x_5$
Variables BÁSICAS (a resolver): $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Resolviendo este sistema, surge que la nueva solución básica factible es:

Nueva Solución Básica Factible (BF): $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$.
Valor de Z $Z = 36$

Prueba de Optimalidad.

Como $$Z = 36 - \tfrac{3}{2}x_4 - x_5$$

Hay evidencias que estamos en un óptimo, ya que no se puede aumentar el valor de la función objetivo aumentando los valores de las variables No Básicas. El objetivo aumentaría si el valor de estas variables disminuyera, pero esto no es posible porque en este punto son iguales a cero (ver solución) y disminuirlas significaría hacer que tomaran valores menores a cero, lo cual es contradictorio con las condiciones de no negatividad iniciales.

## B. FORMA TABULAR del Método SIMPLEX

Esta solución tiene exactamente la misma base conceptual y conlleva los mismos procedimientos, pero es más mecánica y por lo tanto más rápida.

Sistema inicial:

$$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$
$$x_1 + x_3 = 4$$
$$2x_2 + x_4 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

Se construye una tabla de doble entrada en la cual las filas representan la función objetivo y las restricciones (en orden) y las columnas son los coeficientes de las variables correspondientes en cada función o restricción. La última columna representa el valor al lado derecho de cada ecuación o desigualdad.

**Tabla 2.**

**Tabla SIMPLEX Inicial del Caso Wyndor Glass Co.**
**Forma Algebraica y Tabular .**

| *Nº Ecuacion* | **Forma Algebraica** | **Forma Tabular** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Var. Básica* | Coeficientes de | | | | | | *Lado derecho* |
| | | | *Z* | *X₁* | *X₂* | *X₃* | *X₄* | *X₅* | |
| *(0)* | $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$ | *Z* | *1* | *-3* | ***-5*** | *0* | *0* | *0* | *0* |
| *(1)* | $x_1 + x_3 = 4$ | *$X_3$* | *0* | *1* | ***0*** | *1* | *0* | *0* | *4* |
| *(2)* | $x_2 + x_4 = 12$ | *$X_4$* | ***0*** | ***0*** | ***2*** | ***0*** | ***1*** | ***0*** | ***12*** |
| *(3)* | $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$ | *$X_5$* | *0* | *3* | ***2*** | *0* | *0* | *1* | *18* |

## PASO INICIAL.

**Tabla 3: Solución Inicial.**

| *Var. Básica* | *Z* | *$X_1$* | *$X_2$* | *$X_3$* | *$X_4$* | *$X_5$* | *Lado der.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Z* | *1* | *-3* | ***-5*** | *0* | *0* | *0* | *0* |
| *$X_3$* | *0* | *1* | ***0*** | *1* | *0* | *0* | *4* |
| *$X_4$* | ***0*** | ***0*** | ***2*** | ***0*** | ***1*** | ***0*** | ***12*** |
| *$X_5$* | *0* | *3* | ***2*** | *0* | *0* | *1* | *18* |

La solución FEV inicial es (0, 0, 4, 12, 18). Se ve que no nos encontramos en un óptimo porque sólo hay coeficientes negativos en las variables de decisión en la primer fila. Se debe hacer una iteración.

## ITERACION 1.

Para ello se elige como variable básica entrante aquella con el coeficiente estrictamente negativo con mayor valor absoluto. Se marca esta columna ("pivote"): columna sombreada y en negrita en la Tabla 3.

Para la elección de la variable que sale, se hace la prueba del cociente mínimo al igual que en la forma algebraica. Aquí consiste simplemente en dividir los valores de la columna "lado derecho" entre los coeficientes estrictamente positivos de la columna pivote. Aquella fila que obtiene el

cociente menor indica la variable saliente y se denomina “fila pivote”: fila sombreada y en negrita de la Tabla 3.
Se transforma La Tabla para reflejar la Nueva BASE ($X_2$, $X_3$, $X_5$) como ya se vio, cambiando $X_2$ por $X_4$ en las filas y se obtiene:

**Tabla 4 : Forma Tabular con Solución Básica luego de la 1ª Iteración.**

| *Var. Básica* | *Z* | *$X_1$* | *$X_2$* | *$X_3$* | *$X_4$* | *$X_5$* | *Lado der.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Z* | *1* | ***-3*** | *0* | *0* | *5/2* | *0* | *30* |
| *$X_3$* | *0* | ***1*** | *0* | *1* | *0* | *0* | *4* |
| *$X_2$* | *0* | ***0*** | *1* | *0* | *½* | *0* | *6* |
| *$X_5$* | ***0*** | ***3*** | ***0*** | ***0*** | ***-1*** | ***1*** | ***6*** |

La solución es (0, 6, 4, 0, 6). No nos encontramos en un óptimo porque todavía hay un coeficiente negativo en una variable de control en la primer fila. Se debe hacer otra iteración.

**ITERACION 2.**

Se eligen la columna y fila pivote como en la iteración anterior.

A partir de los Criterios de la “mejor Tasa de Crecimiento” y del “Cociente Mínimo” se identifica que la variable que sale es $X_1$, y la que entra es $X_5$.

La Tabla 5 refleja las transformaciones que identifican la Nueva Base ($x_1$, $x_2$, $x_3$):

**Tabla 5 : Forma Tabular con Solución Básica Optima luego de la 2ª Iteración.**

| *Var. Básica* | *Z* | *$X_1$* | *$X_2$* | *$X_3$* | *$X_4$* | *$X_5$* | *Lado der.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Z* | *1* | *0* | *0* | *0* | *3/2* | *1* | *36* |
| *$X_3$* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1/3* | *-1/3* | *2* |
| *$X_2$* | *0* | *0* | *1* | *0* | *½* | *0* | *6* |
| *$X_1$* | *0* | *1* | *0* | *0* | *-1/3* | *1/3* | *2* |

La Solución Básica Optima es ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$) = (2, 6, 2, 0, 0).

Esta vez los coeficientes en la primera fila son positivos, con lo cual la solución hallada es óptima.

El valor de la función objetivo en el óptimo es Z = 36.

---

## C. ROMPIMIENTO DE EMPATES EN EL METODO SIMPLEX

C.1 Empate para la Variable Básica Entrante.

C.2 Empate para la Variable Básica que Sale : Degeneración.

C.3 Cuando No hay Variable Básica que Sale : Funcion Objetiva No Acotada..

C.4 Soluciones Optimas Múltiples.