

RELACIONES BASICAS ENTRE PRIMAL-DUAL

(1) **Propiedad de Dualidad Débil.**

Si x^o es una Solución Factible para el Problema Primal e y^o es una Solución Factible para el Problema Dual, entonces $cx^o \leq y^o b$

Esta Propiedad describe la relación entre cualquier par de soluciones factibles del Primal y del Dual respectivamente.

Ver Ejemplo "Wyndor Glass Co.". (Tabla N° 3). Una Sol. Factible cualquiera para el Primal es $x^o = (0,6)$ que corresponde a una $Z^o=30$. Una Sol. Factible cualquiera para el Dual es $y^o = (3, 5/2, 0)$ que corresponde a una función objetivo $W^o=42$.

(2) **Propiedad de Dualidad Fuerte.**

Si x^* es una Solución Óptima para el Problema Primal e y^* es una Solución Óptima para el Problema Dual, entonces $cx^* = y^* b$

Estas dos propiedades (1) + (2) implican que $cx < yb$ para soluciones factibles si una o ambas no son óptimas para sus PL respectivos, o $cx = yb$ si son óptimas.

(3) **Propiedad de Soluciones Complementarias**

En cada iteración, el método Simplex identifica de manera simultánea una solución FEV x para el problema PRIMAL y una solución complementaria y para el problema DUAL (disponible en el Renglón "0" como coeficientes de las variables de holgura) donde :

$$cx = yb$$

Si x no es óptima para el PRIMAL, entonces y no es factible para el problema DUAL.

Ver Ejemplo Wyndor Glass.

En la FEV $x = (0,6)$ el PRIMAL alcanza un valor $Z=30$, pero no es óptimo pues existen otros FEV adyacentes que mejoran la Función Objetivo. A esta solución en el PRIMAL corresponde una Solución $y = (0, 3/2, 0)$ que corresponde a una Función Objetivo en el Dual $W=30$, pero que no es factible pues no satisface la 2ª Restricción del DUAL.

(4) **Propiedad de Soluciones Complementarias Óptimas**

En la última iteración, el método Simplex identifica de manera simultánea una solución óptima x^* para el problema PRIMAL y una solución Óptima complementaria y^* para el problema DUAL (disponible en el Renglón "0" como coeficientes de las variables de holgura) donde :

$$cx^* = y^* b$$

Los y^* representan los Precios Sombra para el Problema Primal.

(4.a) Propiedad de Soluciones Básicas Complementarias.

Cada solución Básica en el problema PRIMAL tiene una solución Básica Complementaria en el problema DUAL, donde los valores respectivos de la función objetivo son iguales $Z=W$.

A partir del Renglón "0" de la Tabla SIMPLEX para la Solución Básica del PRIMAL, la solución básica DUAL complementaria ($y, z-c$) se encuentra a nivel de los coeficientes de las variables de holgura y de las variables de decisión respectivamente, como lo indica la siguiente Tabla :

Nº Iteración	Nº Renglón	PROBLEMA PRIMAL: Ej. "Wyndor Glass Co."					
		Coeficientes Tabla Simplex					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
0	(0)	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	y_1	y_2	y_3	0

x_1	Variables de Decisión	Variables de Superavit (Costos Reducidos)	$z_1 - c_1$
x_2			$z_2 - c_2$
x_3	Variables de Holgura	Variables de Decisión del DUAL (Precios Sombra)	y_1
x_4			y_2
x_5			y_3

(4.b) Propiedad de Holgura Complementaria (Relación entre Variables Básicas y No-Básicas del Primal y del Dual)

Dada la asociación entre variables dadas en la Tabla anterior, las variables en la Solución Básica Primal y en la Solución Básica Dual complementaria satisfacen las siguientes relaciones de holgura complementaria:

PRIMAL	DUAL	
Var. Básica	Var. No Básica	"m" variables
Var. No Básica	Var. Básica	"n-m" variables

Esta relación es simétrica, de manera que las dos soluciones básicas son complementarias entre sí.

(5) Propiedad de Simetría

Para cualquier problema PRIMAL y su Problema DUAL, las relaciones entre ellos deben ser simétricas debido a que el DUAL de este problema Dual es el problema PRIMAL.

TEOREMA DE LA DUALIDAD EN PROGRAMACION LINEAL

Las siguientes relaciones son las únicas relaciones posibles entre los Problemas PRIMAL y DUAL de un Problema de Programación Lineal :

1. Si un Problema PRIMAL tiene SOLUCIONES FACTIBLES y una FUNCION OBJETIVO ACOTADA (por lo tanto existe al menos una solución óptima) entonces ocurre lo mismo con el DUAL. Esta relación también es válida de manera simétrica. En estas condiciones se aplican las propiedades de Dualidad Débil y Fuerte.
2. Si uno de los Problemas (Primal o Dual) tiene SOLUCIONES FACTIBLES Y UNA SOLUCIÓN OBJETIVO NO ACOTADA (es decir no existe solución óptima), entonces el otro Problema no tiene SOLUCIONES FACTIBLES.
3. Si un Problema (Primal o Dual) NO TIENE SOLUCIONES FACTIBLES, entonces el otro Problema NO TIENE SOLUCIONES FACTIBLES o bien la función objetivo es NO ACOTADA.

EJEMPLO: WYNDOR GLASS Co.

Problema PRIMAL : "Wyndor Glass Co"

Max $Z = 3x_1 + 5x_2$
 sr
 $x_1 \leq 4$
 $2x_2 \leq 12$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Problema DUAL : "Wyndor Glass Co"

Min $y_0 = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
 sr
 $y_1 + 3y_3 \geq 3$
 $2y_2 + 2y_3 \geq 5$
 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

Tabla N° 1 : TABLA SIMPLEX del Ejemplo "Wyndor Glass Co."
Problema Primal

Nº Iter.	Nº Ec.	Var. Básica	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Lado Derecho
0	(0)	Z	1	-3	-5	0	0	0	0
	(1)	X ₃	0	1	0	1	0	0	4
	(2)	X ₄	0	0	2	0	1	0	12
	(3)	X ₅	0	3	2	0	0	1	18
1	(0)	Z	1	-3	0	0	5/2	0	30
	(1)	X ₃	0	1	0	1	0	0	4
	(2)	X ₂	0	0	1	0	½	0	6
	(3)	X ₅	0	3	0	0	-1	1	6
2	(0)	Z	1	0	0	0	3/2	1	36
	(1)	X ₃	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
	(2)	X ₂	0	0	1	0	½	0	6
	(3)	X ₁	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

Tabla N° 2 :

Coefficientes del Renglón "0" del Ejemplo "Wyndor Glass Co." y la Solución del DUAL

N° Iteración	N° Renglón	PROBLEMA PRIMAL						SOLUCION PROBLEMA DUAL					
		Coeficientes Tabla Simplex						SOLUCION Variables del DUAL					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	y_1	y_2	y_3	W
0	(0)	-3	-5	0	0	0	0	-3	-5	0	0	0	0
1	(0)	-3	0	0	5/2	0	30	-3	0	0	5/2	0	30
2	(0)	0	0	0	3/2	1	36	0	0	0	3/2	1	36

Tabla N° 3 :

SOLUCIONES BASICAS COMPLEMENTARIAS PRIMAL-DUAL
Ejemplo "Wyndor Glass Co."

N° Sol.	PROBLEMA PRIMAL		Z = W	PROBLEMA DUAL	
	Solución Básica	Factible?		Factible?	Solución Básica
	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$				$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$
1	(0, 0, 4, 12, 18)	SI	0	NO	(0, 0, 0, -3, -5)
2	(4, 0, 0, 12, 6)	SI	12	NO	(3, 0, 0, 0, -5)
4	(4, 3, 0, 6, 0)	SI	27	NO	(-9/2, 0, 5/2, 0, 0)
5	(0, 6, 4, 0, 6)	SI	30	NO	(0, 5/2, 0, -3, 0)
6	(2, 6, 2, 0, 0)	SI	36	SI	(0, 3/2, 1, 0, 0)
7	(4, 6, 0, 0, -6)	NO	42	SI	(3, 5/2, 0, 0, 0)
8	(0, 9, 4, -6, 0)	NO	45	SI	(0, 0, 5/2, 9/2, 0)