

Ejercicio PRIMAL_DUAL (13-Mayo-05 y 1º Revisión-2003)

Considere el Programa Lineal PRIMAL siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 2x_1 - 4x_2 \\ \text{s.r.} & \\ (1) & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

RESPONDER Y JUSTIFICAR SU RESPUESTA.

(1) Construya el Problema DUAL

$$\begin{array}{l} \text{MIN } W = y_1 \\ \text{sr} \\ y_1 \geq 2 \\ -y_1 \geq -4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

(2) Describa la Solución Óptima del Problema DUAL.

La Región Factible está determinada por el intervalo siguiente: $2 \leq y_1 \leq 4$
El Mínimo de la F.O. se alcanza ($W=2$, cuando $y_1 = 2$)

Forma Ampliada del DUAL

$$\begin{array}{l} \text{MIN } W = y_1 \\ \text{sr} \\ y_1 - y_2 = 2 \\ -y_1 - y_3 = -4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

La Solución Óptima del Problema Dual es: $W = 2$; $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$

(3) A partir de la Solución del DUAL encontrada en (2) y de la Propiedad de Holgura Complementaria encontrar la Solución Óptima del PRIMAL.

Según la **Propiedad de Soluciones Básicas Complementarias** existe una relación complementaria
- entre las Variables de Decisión del PRIMAL (x_1, x_2) \Leftrightarrow las variables superávit del DUAL (y_2, y_3)
- entre la Variable de Holgura del PRIMAL (x_3) \Leftrightarrow la variable de Decisión del DUAL (y_1)

Según la **Propiedad de Holguras Complementarias** entre variables asociadas del Primal y Dual tenemos

- Cuando y_1 (variable de decisión del Dual y Precio Sombra del Primal) es BÁSICA, entonces la variable asociada x_3 (variable de holgura del PRIMAL) será NO BÁSICA.
- Cuando y_2 (variable de superávit del Dual y Costo Reducido del Primal) es NO BÁSICA, entonces la variable asociada x_1 (variable de decisión del PRIMAL) será BÁSICA.
- Cuando y_3 (variable de superávit del Dual y Costo Reducido del Primal) es BÁSICA, entonces la variable asociada x_2 (Variable de Decisión del PRIMAL) será NO BÁSICA.

DUAL			PRIMAL		
Var Decision	$y_1 = 2$	Básica	$x_3 = 0$	No Básica	Var. Holgura
Var. Superávit	$y_2 = 0$	No Básica	$x_1 = 1$	Básica	Var. Decisión
	$y_3 = 2$	Básica	$x_2 = 0$	No Básica	

- (4) Para la Solución Óptima de este PL completar el Renglón (0) de la Tabla Simplex en base a la información obtenida en (2).

Nº Iteración	Nº Ecuación	Forma Algebraica	Forma Tabular						
			Var. Básica	Coeficientes de			Lado derecho		
				Z	X ₁	X ₂		X ₃	
Inicio	(0)	$Z - 2x_1 + 4x_2 - 0x_3 = 0$	Z	1	-2	4	0	0	Sol. Fact. + No Optima
	(1)	$x_1 - x_2 + x_3 = 4$	X ₃	0	1	-1	1	1	
Iter Nº 1	(0)		Z	1	0	2	2	2	Sol. Fact.+ Óptima (Sol.Unica)
	(1)		X ₁	0	1	-1	1	1	

En la Tabla anterior los Coeficientes del Renglón (0) o Ecuación (0) en la Iteración Nº1 se obtuvieron a partir de la resolución del PL mediante la Tabla del SIMPLEX. También se pueden calcular a partir de los datos disponibles en la solución ampliada del Problema Dual :

- El coeficiente debajo de x₁ representa el valor de la variable de superávit y₂ del Problema Dual (Costo Reducido de la Variable x₁ del Primal)
- El coeficiente debajo de x₂ representa el valor de la variable de superávit y₃ del Problema Dual (Costo Reducido de la variable x₂ del Primal)
- El coeficiente debajo de x₃ representa el valor de la variable dual y₁ del Problema Dual (el Precio Sombra de la Restricción (1) del PRIMAL)

- (5) En base a los resultados obtenidos anteriormente completar la Tabla de Soluciones Básicas Complementarias para las 3 Soluciones indicadas en la 2ª columna de la Tabla:

Nº Sol.	PROBLEMA PRIMAL			PROBLEMA DUAL		
	Solución Básica	Factible?	Z =	W =	Solución Básica	Factible?
	(x ₁ ; x ₂ ; x ₃)				(y ₁ ; y ₂ ; y ₃)	
1	(0; 0; 1)	SI	0	0	(0; -2; 4)	NO
2	(0; -1; 0)	NO	4	4	(4; 2; 0)	SI
3	(1; 0; 0)	SI	2	2	(2; 0; 2)	SI

- (6) Suponga que el coeficiente de x₁ en la Función Objetivo del PRIMAL (c₁=2) en realidad puede tener cualquier valor en el Modelo. ¿Para qué valores de c₁ ocurre que el problema DUAL no tiene soluciones factibles? A partir de la Teoría de la Dualidad ¿qué implica una Solución Factible en el DUAL para la solución del PRIMAL? Justificar.

DUAL :
 1º Restricción y₁ - y₂ = c₁ = 2
 2º Restricción y₁ + y₃ = c₂ = 4
 Si c₁ > 4 entonces y₁ o y₃ serán negativas en la 2º Restricción y la solución del DUAL es NO FACTIBLE.
 Si el DUAL es NO FACTIBLE, entonces la solución del PRIMAL es NO FACTIBLE o NO ACOTADA.

- (7) Suponga ahora que en el PRIMAL del Modelo inicial se introduce una nueva variable x_n, cuyos coeficientes son c_n = 5 y a_{1n} = 1. A partir de la Teoría de la Dualidad determinar si la Solución óptima en (3) sigue siendo óptima en el PRIMAL del nuevo Modelo ampliado. Justificar.

La nueva Variable en el PRIMAL introduce una Nueva Restricción en el Dual a partir de los datos de la Pregunta y la Solución Óptima (y₁=2), entonces 1*y₁= 2 y 2 no es ≥ c_n=5 ;
 La Solución Óptima anterior en (3) NO ES MAS Factible en el DUAL y NO ES OPTIMA en el PRIMAL