

Ejercicio 3.6.16

Area de $R(f, g, [0,2]) = \int_0^2 |f - g|$, entonces hay que graficar, en un mismo gráfico, las

funciones f y g en el intervalo $[0,2]$ para saber si $f < g$ o $f > g$.

La función g es lineal por ser un polinomio de primer grado, una constante por un polinomio de primer grado. Para graficarla en el intervalo $[0,2]$ basta calcular

$$g(0) = 2e, \text{ y } g(2) = 0$$

La función f es continua en $[0,2]$, para graficarla calculas su derivada y estudias su signo, vas a obtener que la derivada es positiva en $[0,2]$ y por lo tanto f es creciente en dicho intervalo, calculas $f(0)=0$ y $f(2)=2e^4$, graficas f del valor en 0 al valor en 2 siempre creciendo.

En el gráfico se obtiene que estas funciones se cortan en un punto, con la observación que da la letra, $f(1)=g(1)$, se sabe que es en $x=1$, y vemos que entre 0 y 1 es mayor g que f , y entre 1 y 2 es mayor f que g .

$$\begin{aligned} \text{Area de } R(f, g, [0,2]) &= \int_0^2 |f - g| = \int_0^1 |f - g| + \int_1^2 |f - g| = \int_0^1 g - f + \int_1^2 f - g = \\ &= \int_0^1 e(2-x) - xe^{x^2} dx + \int_1^2 xe^{x^2} - e(2-x) dx = e \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} e^{x^2} - e \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{3}{2}e - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^4 - 2e - \frac{1}{2}e + \frac{3}{2}e = \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.6.17

b) $\int_a^b f + \int_a^b f^{-1} = \int_a^b f + \int_a^b tf'(t)dt =$ (se usó la parte a, y ahora aplicamos partes a la segunda integral usando que una primitiva de f' es f y que la derivada de t es 1)

$$= \int_a^b f + tf'(t) \Big|_a^b - \int_a^b f(t)dt = bf(b) - af(a)$$

Ejercicio 3.6.19

a) Utilizando la sustitución $t = \frac{1}{z}$, $dt = -\frac{1}{z^2} dz$,

$$f(x) = \int_1^x \frac{Lt}{1+t} dt = \int_1^{\frac{1}{z}} \frac{L \left(\frac{1}{z} \right)}{1 + \frac{1}{z}} \cdot \frac{-1}{z^2} dz = \int_1^{\frac{1}{z}} \frac{L1 - Lz}{z+1} \cdot \frac{-1}{z^2} dz = \int_1^{\frac{1}{z}} \frac{Lz}{z^2 + z} dz$$

b) $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{Lt}{1+t} dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lt}{1+t} dt =$ (usando parte a)

$$\begin{aligned} &= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lt}{t^2 + t} dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lt}{1+t} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lt}{(t+1)t} + \frac{Lt}{1+t} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lt + tLt}{(t+1)t} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lt(1+t)}{(t+1)t} dt = \\ &= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lt}{t} dt = \frac{1}{2} (Lt)^2 \Big|_1^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \left(L \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} (L1 - Lx)^2 = \frac{1}{2} (Lx)^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.6.22

En este ejercicio los integrandos son cocientes de polinomios, donde el numerador es de menor grado que el denominador, y el denominador tiene todas sus raíces reales y distintas. En estas condiciones dicho cociente se puede expresar como suma de fracciones simples, es decir fracciones de numerador un número y denominador un polinomio de primer grado.

b) El denominador tiene raíces 2 y 3, entonces el integrando es continuo en el intervalo $[0,1]$ y se puede descomponer en suma de fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}, \text{ calculamos } a \text{ y } b \text{ con el método de la}$$

“tapadita” o haciendo común denominador usamos identidad de polinomios ya que el numerador tiene que ser el polinomio $x+1$. Obtenemos que $a=4, b=-3$,

entonces

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = \int_0^1 \frac{4}{x-3} + \frac{-3}{x-2} dx = 4L|x-3| - 3L|x-2| \Big|_0^1 = 4L2 - 4L3 + 3L2 = 7L2 - 4L3$$

e) $\frac{2x^2+x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$, calculamos $a=1, b=-2, c=3$

$$\int_4^2 \frac{2x^2+x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx = \int_4^2 \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x+2} dx = L(x-1) - 2L(x+1) + 3L(x+2) \Big|_4^2 =$$

$$= -2L3 + 3L4 - L3 + 2L5 - 3L6 = 3L2 - 6L3 + 2L5, \text{ ya que}$$

$$L4 = L(2.2) = L2 + L2, \text{ y } L6 = L(2.3) = L2 + L3$$

f) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$, sus raíces son 0,1,-1.

$$\frac{1-5x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \text{ calculamos } a=-1, b=-2, c=3$$

$$\int_2^3 \frac{1-5x}{x(x-1)(x+1)} dx = \int_2^3 \frac{-1}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x+1} dx = \dots\dots\dots$$

Ejercicio 3.6.23

e) En este ejercicio el integrando es un cociente de polinomios, pero el grado del numerador no es menor que el grado del denominador. En estos casos escribiremos el cociente dado como suma de un polinomio más un cociente donde el grado del numerador sea menor que el del denominador.

$$\frac{x^2}{x^2+4x+3} = \frac{x^2+4x+3-4x-3}{x^2+4x+3} = \frac{x^2+4x+3}{x^2+4x+3} + \frac{-4x-3}{x^2+4x+3} = 1 + \frac{-4x-3}{x^2+4x+3} =$$

En este último cociente el denominador tiene raíces -1 y -3, y el numerador es de menor grado que el denominador, por lo tanto se puede descomponer en suma de fracciones simples.

$$= 1 + \frac{-4x-3}{(x+1)(x+3)} = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3} = 1 + \frac{1/2}{x+1} + \frac{-9/2}{x+3}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+4x+3} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1/2}{x+1} + \frac{-9/2}{x+3} \right) dx = x + \frac{1}{2}L(x+1) - \frac{9}{2}L(x+3) \Big|_0^1 =$$

$$1 + \frac{1}{2}L2 - \frac{9}{4}L4 + \frac{9}{2}L3 = 1 - \frac{17}{2}L2 + \frac{9}{2}L3, \text{ se usó que } L4 = L(2.2) = L2 + L2 = 2L2$$