RESUMEN DE FÓRMULAS – ESTADÍSTICA I

PROBABILIDAD

Ley de Probabilidades Totales para eventos cualesquiera:

2 eventos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3 eventos $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Probabilidad Condicionada:

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ con } P(B) \neq 0$$

Propiedad: $P(A/B) = 1 - P\left(\bar{A}/B\right)$

Ley de las Probabilidades Compuestas:

2 eventos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ con $P(A) \neq 0$

3 eventos $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P\left(B/A\right) \cdot P\left(C/A \cap B\right)$

con $P(A) \neq 0$; $P(A \cap B) \neq 0$

Eventos estocásticamente independientes:

2 eventos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3 eventos $\begin{cases} P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C) \\ P(A \cap B) = P(A).P(B) \\ P(A \cap C) = P(A).P(C) \\ P(B \cap C) = P(B).P(C) \end{cases}$

Teorema de Bayes:

$$P\left(A_r/B\right) = \frac{P(A_r) \cdot P\left(B/A_r\right)}{\sum_r P(A_r) \cdot P\left(B/A_r\right)}$$

con $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$; $\bigcup_r A_r = \Omega$; $P(B) \neq 0$; $P(A_i) \neq 0$

VARIABLES ALEATORIAS

Función de distribución (F_X):

$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \forall \ x \in R$

siendo X cualquier v.a.

Función de cuantía (p_X) :

$p_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & \forall x \in \mathrm{Rec}(X) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$ con X una v.a. discreta

Propiedades de la función de cuantía:

1. $p_X(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in R$
2. $\sum_i p_X(x_i) = 1$

Def. de v.a. abs. continua:

X es abs.cont. $\Leftrightarrow \exists \ f_X : R \to R$ (*función de densidad*) tal que

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) \, dt \quad \forall \ x \in R$ y

cumple las siguientes propiedades:

1. $f_X(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

V.a.Uniforme discreta:

$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \forall x_i \in \mathrm{Rec}(X); i = 1,2,3,\ldots,n \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$

v.a.Uniforme abs continua

X~U(a,b):

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \ a < x < b \\ 0 & en\, otro\, caso \end{cases}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \ a < x < b \\ 1 & si \ x \geq b \end{cases}$

$E(X) = \frac{a+b}{2}$

$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

v.a.Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ **:** $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall \ x \in R$;

con $E(X) = \mu$ *y* $V(X) = \sigma^2$, $\sigma \neq 0$

<u>*Teorema:*</u> Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a. independientes donde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2_i)$ *, entonces la v.a.* $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n + b$ se distribuye Normal con parámetros:

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b \quad ; \quad \sigma^2_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

<u>*V.a. Normal Estandarizada*</u> *(Z)*

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Definida la v.a. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$; entonces $Z \sim N(0,1)$

Momentos y otros valores típicos

Esperanza de una v.a. unidimensional:

Si X es v.a. discreta: $E(X) = \sum_{x_i \in \mathrm{Rec}(X)} x_i \, p_X(x_i)$

Si X es v.a. abs continua: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \, dx$

Esperanza de una función de v.a.:

Si X es discreta: $E[g(X)] = \sum_{x_i \in \mathrm{Rec}(X)} g(x_i) \, p_X(x_i)$

Si X es abs cont. $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx$

Varianza: $V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - E^2(X)$

Desviación estándar : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Esperanza de un producto de dos v.a.:

Si (X,Y) es v.a. discreta: $E(X.Y) = \sum_{(x,y) \in \mathrm{Rec}(X,Y)} \sum xy \cdot p_{X,Y}(x,y)$

Si (X,Y) es v.a. abs continua: $E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f_{X,Y}(x,y) \, dxdy$

Covarianza: $COV(X,Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\} = E(X.Y) - E(X)E(Y)$

Coeficiente de correlación lineal: $\rho = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

Algunas propiedades:

$E(aX + b) = aE(X) + b$

$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

$V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2abCOV(X,Y)$

Si X e Y son v.a. independientes $\Rightarrow$ COV (X,Y)=0

SIMULACIÓN

Transformación en probabilidad si X es abs. continua:

$$Y = F_X(X) \Rightarrow y = F_X(x)$$

Mediante la transformación en probabilidad de una v.a X abs continua cualquiera se obtiene una v.a. Y ~U(0,1)

Transformación en probabilidad si X es discreta:

Si $y < p_1 \Rightarrow x = x_1$

Si $p_1 \leq y < p_1 + p_2 \Rightarrow x = x_2$

Si $p_1 + p_2 \leq y < p_1 + p_2 + p_3 \Rightarrow x = x_3$

....

Si $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} \leq y < 1 \Rightarrow x = x_n$

; donde $p_X(x) = \begin{cases} p_i & si \ x = x_i \quad \forall \ i = 1,2,3,\ldots,n \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases}$

Entonces se obtiene una v.a. Y ~U(0,1)

MATEMÁTICA FINANCIERA

Leyes financieras de cálculo: Si el **Interés** es **Simple** : VF = VP (1 + ni) ; Si el **Interés** es **Compuesto** : VF = VP $(1 + i)^n$ donde i y n están expresados en la misma unidad de tiempo

Tasas en diferentes monedas: $(1 + i^{\$}) = (1 + i^{U\$S})(1 + dev)$ donde dev : tasa de devaluación del \$ respecto al U\$S durante el período en cuestión; entonces $dev = (TC_1 / TC_0) - 1$ donde las tres tasas están expresados en la misma unidad de tiempo

Tasa real (r): (1 + i) = (1 + r)(1 + h) donde h : tasa de inflación durante el período en cuestión, medida por un índice de precios (IP); entonces $h = (IP_1 / IP_0) - 1$, y las tres tasas están expresadas en la misma unidad de tiempo.

MATEMÁTICA FINANCIERA (Continuación)

Rentas

Valor de una Renta en el instante de tiempo t, con n cuotas, y siendo i la tasa efectiva de interés del período:

$$R(t,n,i) = \sum_{k=1}^{n} C_k (1+i)^{t-k}$$

*Caso particular: <u>Renta con cuota constante</u>: $C_k = C$ para todo k

$$R(t,n,i) = C\,V(t,n,i) = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^t$$

Amortización de Deudas

$C_k = A_k + I_k$

$I_k = S(k-1, n-k+1).i$

$S(t, n-k) = R(t-k, n-k, i)$ donde

t: instante de valuación

k: cantidad de cuotas ya pagadas

i: tasa efectiva de interés del período

EVALUACIÓN DE INVERSIONES

Valor Presente Neto:

$$VPN = I_0 + \sum_{k=1}^{n} I_k (1+i)^{-k}$$

i=TCC definida en el mismo período que los flujos

Valor Presente Neto Promedio:

$$VPNP = \frac{I_0 + \sum_{k=1}^{n} I_k (1+i)^{-k}}{V(0,n,i)}$$

Tasa Interna de Retorno: r tal que $I_0 + \sum_{k=1}^{n} I_k (1+r)^{-k} = 0$

TIR terminal: r´ tal que $I_0 + \dfrac{\sum_{k=1}^{n} I_k (1+i)^{n-k}}{(1+r')^n} = 0$

TIR real: r* tal que $-a_0 + \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)(1+r^*)^{-k} = 0$ siendo $b_k - a_k = \dfrac{B_k - A_k}{IP_k / IP_0}$

ACTUARIAL

Definiciones:

x = edad de la persona en años enteros

l_x = cantidad de personas vivas , pertenecientes a un grupo inicial, que llegan con vida exactamente a la edad x .

$l_w = 0$ (w es la edad a la cual no quedan sobrevivientes del grupo inicial)

d_x = cantidad de personas del grupo inicial que mueren después de alcanzar la edad x y antes de alcanzar la edad x+1

l_0 = grupo inicial al cual se refiere la tabla

$d_x = l_x - l_{x+1}$ $\qquad d_{w-1} = l_{w-1}$

$$\sum_{t=0}^{x} d_t = l_0 - l_{x+1} \qquad \sum_{t=0}^{w-1} d_t = l_0$$

Sea X una v.a. definida como “edad de muerte de c/persona”en años enteros.

Entonces : $P(X = x) = \dfrac{d_x}{l_0}$ si $x = 0,1,2,..., w-1$

Definimos:

- p(x, x + n) = probabilidad de que una persona de exactamente “x” años de edad llegue con vida a los “x+n” años
- q(x, x + n) = probabilidad de que una persona de exactamente “x” años de edad no llegue con vida a los “x+n” años

Entonces: $p(x,x+n) = \dfrac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - q(x,x+n)$

(Se parte para todos los seguros de una persona de exactamente x años de edad)

<u>Seguro Dotal Puro:</u>

La persona paga hoy “VA” para cobrar “C” si está con vida dentro de n años: $VA = \dfrac{C}{(1+i)^n}\, p(x,x+n)$

<u>Rentas en caso de vida:</u>

- paga hoy “VA” para cobrar “C” por año mientras está vivo, El primer pago si corresponde se da a la edad x+1

$$VA = \sum_{t=1}^{w-1-x} \frac{C}{(1+i)^t}\, p(x,x+t)$$

- paga hoy “VA” para cobrar “C” por año mientras está vivo, comenzando dentro de j+1 años y durante n años:

$$VA = \sum_{t=j+1}^{j+n} \frac{C}{(1+i)^t}\, p(x,x+t)$$

<u>Seguro de muerte:</u>

- paga hoy “VA” para que el beneficiario cobre “C” en el aniversario del contrato inmediato posterior al fallecimiento:

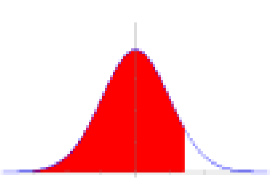
$$VA = \frac{Cd_x(1+i)^{-1} + Cd_{x+1}(1+i)^{-2} + Cd_{x+2}(1+i)^{-3} + \cdots + Cd_{w-1}(1+i)^{-w+x}}{l_x}$$

- paga hoy “VA”

para que el beneficiario cobre “C” en el aniversario del contrato inmediato posterior al fallecimiento, en tanto ocurra después de que transcurran j años pero antes de los j+n años:

$$VA = \frac{Cd_{x+j}(1+i)^{-j-1} + Cd_{x+j+1}(1+i)^{-j-2} + \cdots + Cd_{x+j+n-1}(1+i)^{-j-n}}{l_x}$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR



Z~N(0,1)

$$F_Z(z) = \Phi(z) = P(Z \le z)$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998